DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS. SOLUCIONES TEMA-1 . MATRICES pags. 34…..

1.-

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	1	0	0
C	1	1	0	1
D	0	0	0	1

2.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/16 & 1/125 \\ 3 & 1 & 1/5 & 1/36 \\ 16 & 5 & 1 & 1/7 \end{pmatrix}$

3.- Hay infinitas matrices que cumplen eso y son de la forma: $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in R$

4.- a=0 ; b=2 ; c=17/3 ; d) 19/3

6.- $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ $A - B + C = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $2A + B - 3C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

$AB - AC = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $2AB - 3AC + 4BC = \begin{pmatrix} -30 & 84 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$

7.- $AB = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 9 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ AC y AD no se pueden.

BA No se puede. $BC = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$ $BD = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 5 & -13 & 18 \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ $CB = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 5 \\ -4 & 12 & 7 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ CD No se puede

DA y DB no se pueden. $DC = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

8.- $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 & 3/2 \\ 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

9.- a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.- a) Hay infinitas matrices que conmutan y son de la forma: $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha - 3\beta \end{pmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in R$

b) Hay infinitas matrices que conmutan y son de la forma: $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in R$

c) Hay infinitas matrices que conmutan y son de la forma: $X = \begin{pmatrix} \beta - \alpha & -2\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in R$

11.- Hay cuatro posibles soluciones que son:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12.- Es cuestión de operar los dos miembros de la igualdad y ver que sale lo mismo.

13.- $A^T B = (8 \quad -1)$ $C^T B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

$D\,D^T = (\,14\,)$ $D^T\,D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

15.- a) Calcula la traspuesta de $(A + A^T)$ y verás lo que sale.
b) Puedes comprobar que: A^2 ; A^4 ; A^6 ……… y todas las potencias pares son simétricas.
A ; A^3 ; A^5; …… y todas las potencias impares son antisimétricas.

16.- $A^{97} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} Si\,n\,es\,par\; B^n = \begin{pmatrix} 2^{n/2} & 0 \\ 0 & 2^{n/2} \end{pmatrix} \\ Si\,n\,es\,impar\; B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

17.- $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ $B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -sen\,n\alpha \\ sen\,n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

C^n es bastante complicado (no hacer) $D^n = \begin{cases} I & si\ n\ es\ par \\ A & si\ n\ es\ impar \end{cases}$

18.- a) $NS = \begin{pmatrix} 5300 \\ 5400 \\ 4800 \end{pmatrix}$ es lo que ha ganado cada artesana en Noviembre.

b) $DS = \begin{pmatrix} 5600 \\ 6000 \\ 6200 \end{pmatrix}$ es lo que ha ganado cada artesana en Diciembre.

c) $(N + D)S = \begin{pmatrix} 10900 \\ 11400 \\ 11000 \end{pmatrix}$ es lo que ha ganado cada artesana entre los dos meses,

19.- Tienes que hacer ceros hasta que te quede triangular (no tiene una única solución)

20.- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ $\nexists\, C^{-1}$ $D^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

21.- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

22.- Es fácil: $X = AB + B^2 = (A + B)B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

23.- a) $\boxed{x = -5/4\ ;\ y = -7/4}$

b) $\boxed{a=-2;\ b=2;\ c=1}$ $\boxed{a=2;\ b=2\ ;c=-1}$ $\boxed{a=2;\ b=-2\ ;\ c=1}$ $\boxed{a=-2\ ;\ b=-2\ ;\ c=-1}$

24.- $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

25.- Podemos despejar X en la ecuación $X = A^{-1}\, B\, A^{-1}$ y se obtiene: $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

26.- a) $X = (C - 2B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1}(B + C) = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

c) $X = A^{-1}\, C\ B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

27.- Opera y comprobarás que $B^2 = I$

28.- a) Debes partir de A^2 y operar usando los datos que te dan hasta llegar a comprobar que sale A.
b) Si es cierto, basta aplicar la propiedad asociativa y la conmutativa cuando se pueda.

29.- Debes operar por Gauss hasta escalonar las matrices, las filas que te queden serán L.I. y ese será el rango:

Rag (A) = 2 Rag (B) = 3 Rag (C) =2 Rag (D) = 3

31.- a) $\begin{cases} Si\ \ a = -6\ ;\ Rag)A) = 1 \\ Si\ a \neq -6\ ;\ Rag(A) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} Si\ a = 1\ ; Rag(A) = 2 \\ Si\ a = -1\ ;\ Rag(A) = 2 \\ Si\ a \neq 1\ \wedge\ a \neq -1\ ; Rag(A) = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} Si\ a = 1\ ; Rag(A) = 1 \\ Si\ a = -2\ ;\ Rag(A) = 2 \\ Si\ a \neq 1\ \wedge\ a \neq -2\ ; Rag(A) = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} Si\ \ a = 3\ ;\ Rag)A) = 2 \\ Si\ a \neq 3\ ;\ Rag(A) = 3 \end{cases}$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD.

2.- Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ponemos las condiciones, operamos y resolvemos. Se obtienen cuatro posibles soluciones que son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.- El valor para que al operar salga la matriz nula es k=1.

5.- Es cuestión de operar para ver que sale A.
Para calcular A^{-1} utilizando la relación anterior, basta con multiplicar por A^{-1} en los dos miembros, simplificar y despejar A^{-1}. Se obtendrá:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\,(A - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6.- a) $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$; $M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

b) Repitiendo el proceso se puede obtener M^4 ; M^5 ; …. $M^n = \begin{pmatrix} a^3 & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

7.- Si es inversible porque $|M| = a^2 + b^2$ que es siempre distinto de cero al no ser a y b cero.
$M^{-1} = \frac{1º}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

9.- $\begin{cases} Si\ \ m = 0\ ;\ Rag)A) = 2 \\ Si\ a \neq 0\ ;\ Rag(A) = 3 \end{cases}$