MATEMÁTICAS -II
SOLUCIONES EJERCICIOS DEL TEMA 10. APLICACIONES DERIVADAS

<u>Páginas 270, 271. 272 , 273 y 274</u>

1.-

FUNCIÓN	DOMINIO	DERIVADA	Estrictamente Creciente	Estrictamente Decreciente
f(x)= -3x+5	R	y'= -3		R
f(x)=x^2-6x	R	y'=2x-6	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$
f(x)=x^3+3x^2-5	R	y'=3x^2+6x	$(-\infty,-2)\mathrm{U}(0,\infty)$	(-2,0)
$f(x) = 3^{-x}$	R	$y' = -3^{-x}\ln 3$		R
$f(x) = e^{2x}$	R	$y' = 2\,e^{2x}$	R	
$f(x) = -\dfrac{3}{x}$	R-{0}	$y' = \dfrac{3}{x^2}$	R-{0}	
$f(x) = \sqrt{x^2-4}$	$(-\infty,-2]\mathrm{U}[2,\infty)$	$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$	$(2,\infty)$	$(-\infty,-2)$
$f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$	R-{3}	$y' = \dfrac{-6}{(x-3)^2}$		$R-\{3\}$

2.- a) Máx. P(2,5)

b) Máx. A(-2,4) ; Mín. B(0,0)

c) Máx. A(3,-15) ; Mín. B(2,-16

d) Mín. $P(e^{-1/2}\,,-\frac{1}{2e})$

e) Mín. P(0,3)

f) Máx. $P(e\,,\,\frac{1}{e})$

g) Máx. $A(2\,,\frac{4}{e^2})$; Mín. B(0,0)

h) Máx. A(1,1/2) ; Mín. B(-1,-1/2)

i) Máx. A $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; Mín. B $\left(\sqrt{2}\,,\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

3.- Si a >1 la función será creciente para cualquier número Real excepto en x=1 porque no existe la función.

4.- b = 4 ; c = -3

5.- a = 1/2 ; b = -2 ; c = -5/2

6.- a = 2 ; b = -3 ; c = -12 ; d= -1

7.-

FUNCIÓN	Convexa ∪	Cóncava ∩	Ptos. Inflexión
$f(x) = 3x^2 - 2x^3$	(-∞,1/2)	(1/2, ∞)	P(1/2 , 1/2)
$f(x) = x^4 - 24x^2 + 80$	(-∞,-2)U(2,∞)	(-2,2)	A(-2,0) y B(2,0)
$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$	(-3, ∞)	(-∞,-3)	No hay
$f(x) = (x^2-14)\cdot e^x$	(-∞,-6)U(2,∞)	(-6,2)	$A\left(-6,\dfrac{22}{e^6}\right)$ y $B(2\,,-10e^2)$
$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	$\left(e^{3/2}\,,\infty\right)$,	$\left(0\,,e^{3/2}\right)$	$P\left(e^{3/2}\,,\dfrac{3}{2\,e^{3/2}}\right)$
$f(x) = \sqrt{x^2+9}$	R		No hay

8.- a) Máx. Rel en el punto $P(1\,,\frac{1}{e})$

Punto de Inflexión en $Q\left(2\,,\frac{2}{e^2}\right)$

b) Mínimo relativo en P(e , -e) y no tiene máximos ni puntos de inflexión.

c) Máx. Rel. en los puntos de abscisa: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Mín. Rel. en los puntos de abscisa: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$

Ptos. Inf. en los puntos de abscisa: $x = \frac{\pi}{2} k$

9.- a=2 ; b=-6 ; c=8 ; d=-1

11.- Los números pedidos son: 5 , 3 y 6

12.- Calculamos el mínimo de la función suma y obtendremos que se alcanza para los números: x=4 ; y=4 . Como la suma es 8 (y es el mínimo) nunca se pueden conseguir dos números cuya suma sea menor que 7.

13.- La caja tiene que tener 6 cm. en cada lado de la base y 7,5 cm. de altura. De esta forma el coste será el más barato posible y ascenderá a 1350€.

14.- El rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado: l= 6 u.

15.- Los trozos del alambre tienen que medir aproximadamente 56,82 m. y 43,18 m.

16.- a) No hagas caso a la L que te pone en el dibujo (está mal pensado) y hazlo a tu manera.
b) Una vez obtenida la expresión el Área se puede obtener que el máximo lo alcanza para $x = 8\sqrt{2}\ m. \ \simeq 11{,}31\, m.$

17.- La distancia tiene que ser: d= $5\sqrt{2}\ m. \ \simeq 7{,}07\, m$

18.- Utiliza la pendiente de la recta como la variable de la función Área que quieres minimizar.
El área mínima se obtiene para m= -2 y la ecuación de la recta será: **y= -2x+4**

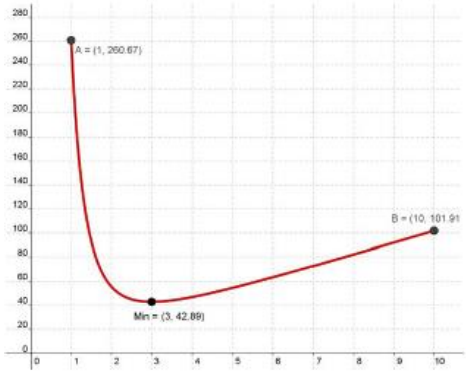
19.- El punto de la gráfica pedido es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

20.- Para obtener el máximo beneficio se han de producir 1.250 tabletas.

21.- El mínimo relativo de la función en el intervalo [1,10] se obtiene para t=3 y vale C(3)=42,89
Hay que comprobar en los extremos del intervalo por si acaso pudiera ser menor y se obtiene:
C(1)=260,67 y C(10)=101,91

Luego definitivamente la menor cantidad de agua se obtiene **para t=3 horas y es 42,89 litros**

En la gráfica adjunta podemos apreciar los datos obtenidos en el ejercicio y su significado.



22.-**No EvAU** Efectivamente f(x) es continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $y\ derivable\ en \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Lo es en todo R
Además en los dos extremos del intervalo vale lo mismo: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
Luego existe al menos un punto c $\in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ en el que la derivada vale cero ; $f'(c) = 0$
En este caso podemos comprobar, haciendo la derivada y despejando, que es $c = \pi$

23.- **No EvAU** Efectivamente f(x) es continua en $[1,3]$ $y\ derivable\ en\ (1,3)$. De hecho lo es en todo R
Además en los dos extremos del intervalo vale lo mismo: $f(1) = 3 + a$, $f(3) = 3 + a$
Luego existe al menos un punto c $\in (1,3)$en el que la derivada vale cero ; $f'(c) = 0$
En este caso podemos comprobar, haciendo la derivada y despejando, que es $c = 7/3$

24.- **No EvAU** a) Sólo hay que hacer las cuentas para ver que se cumple.
b) Su haces la derivada e igualas a cero te sale que no tiene solución.
c) No se puede aplicar el teorema de Rolle y por eso no hay solución porque no es continua en $[0, \pi]$, de hecho es discontinua para cos x= -1/2 y eso ocurre para $x = 120º = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

25.- **No EvAU** Debe ser continua y derivable y además con valores iguales en los extremos, Se obtiene:
a= -4 ; b=2 ; c= -9

26.- **No EvAU** Debe ser continua, derivable y con valores iguales en los extremos, Se obtiene a= -1:
Existe un punto c $\in (0,1)$ en el que la derivada es cero y por tanto pendiente cero m=f '(c)=0
Si hacemos la derivada y despejamos obtenemos que $c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0{,}58 \in (0,1)$

27.- **No EvAU** No se contradice porque no es derivable en el intervalo (-1,1). Haz la derivada y comprobarás que te sale $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ que no es derivable en x=0

38.-.- a) 2 b) 0 c) -5/2
d) 0 e) 1 f) **No EvAU** e^3 (con ln)
g) 1/2 h) e^6 i) **No EvAU** 1 (con ln)
j) 6 (opera para que quede $\frac{\infty}{\infty}$) k) 2 (opera para que quede $\frac{0}{0}$) l) **No EvAU** 1 (con ln)
m) **No EvAU** 1 (toma logaritmos) n) $\sqrt{a \cdot b}$ ñ) e^2

39.- Si hacemos el límite por L' Hôpital llegaremos a una expresión del tipo $\frac{1+b}{0}$. Para que ese límite acabe dando un resultado finito también debe ser 1+b=0 , luego b= -1.
Ahora calculamos el límite poniendo b= -1 y sale : -1/3

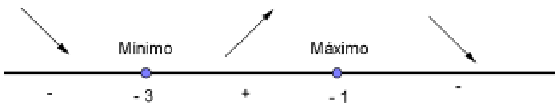
40.- Son similares al anterior y se obtienen:
a) a=3 ; b=2 b) k=-2

41.- Máximo relativo en $x = \pi/4$ Mínimo relativo en $x = \frac{5\pi}{4}$ y un Punto .Inf. en $x = \pi$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD pag. 274.

1.- $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}$; $f'(x) = \frac{-x^2-4x-3}{e^x}$ y $f''(x) = \frac{x^2+2x-1}{e^x}$

Si estudiamos el signo de la derivada y':



Creciente en (-3,-1) Decreciente en $(-\infty,-3)U(-1,\infty)$
Mínimo relativo en A(-3,0) y Máximo relativo en B(-1,4e)

2.- Sea "x" el número de árboles que se añaden:

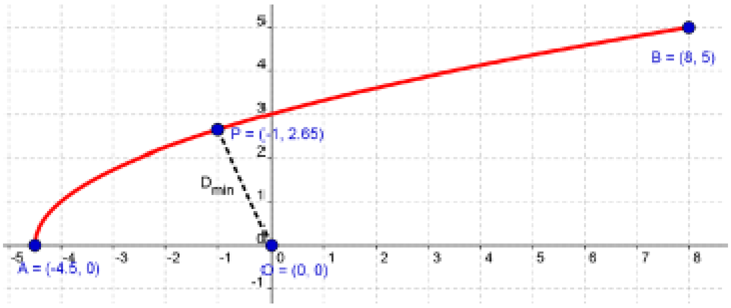
SITUACIÓN	Número de árboles	Frutos por árbol	Producción total
Inicial	24	600	P= 14.400
Final	24+x	600-15x	P=(24+x)(600-15x)

La producción máxima se obtiene con 32 árboles. Por curiosidad obtendrá 15.360 frutos.

3.- El área máxima se obtiene con un triángulo isósceles que acaba teniendo los tres lados iguales a 2 m. Es por tanto un triángulo equilátero además de isósceles.

4.- a) Un punto genérico de la trayectoria es de la forma $P(x, \sqrt{2x+9})$. Expresamos la distancia desde ese punto al Origen (Sol) $d = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$

b) La distancia mínima es para x=-1 . Por lo tanto en el punto $P(-1, \sqrt{7})$ es cuando más cerca está del Sol. Dicha distancia es $d = \sqrt{8}$



5.- Se necesitan $\frac{16-3\sqrt{2}}{4} \simeq 2{,}94\ m.$ de cable terrestre y $\frac{9\sqrt{2}}{4} \simeq 3{,}18\ m.$ de cable aéreo.

6.- El radio debe ser $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \simeq 1{,}693\ m.$ y la altura $h = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \simeq 3{,}385\ m$

7.- No EvAU La función es continua para cualquier valor de "x" incluso en x=0 por lo que lo es en $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$

También tiene que se derivable en $(-\frac{\pi}{2}, 1)$ luego debe serlo en x=0 y para eso sus derivadas laterales han de ser iguales $f'(x) = \begin{cases} sen\ x & si\ x < 0 \\ 2x + a & si\ x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \rightarrow 0 = 0 + a$

Luego para que sea derivable a=0.

Además debe valer lo mismo en los dos extremos $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y f(1) = 1 . Esto se cumple. Esto me garantiza, por el teorema de Rolle, que hay al menos un punto $c \in (-\frac{\pi}{2}, 1)$ en el que la derivada vale cero. Efectivamente si igualamos $f'(x) = 0$ y despejamos obtenemos que sale x=0 que obviamente pertenece a ese intervalo.

8.- No EvAU La derivada es: $f'(x) = 3x^2 - 12$ que se anula para x=2 ; x=-2 independientemente de "a"

Si hubiera dos soluciones distintas de la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ en el intervalo [-2,2] querría decir que hay dos valores de x (x_1 y x_2) , en dicho intervalo en los que la función valdría cero, es decir vale lo mismo en los dos puntos $f(x_1) = 0$ $y\ f(x_2) = 0$ y como es continua y derivable, por el teorema de Rolle debería existir un punto $c\ \epsilon (x_1, x_2)$ en el que la derivada valga cero, pero eso es imposible porque los únicos puntos en los que vale cero son el x= -2 y el x=2

10.- Debe valer a=1 y poniendo este valor, al hacer el límite se obtiene como resultado

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ x - x\ e^x}{x^2}\right) = -1$$