MATEMÁTICAS -II

SOLUCIONES A EJERCICIOS DEL TEMA 13. INTEGRALES DEFINIDAS

<u>Páginas 348, 349 y 350</u>

7.- a) $F'(x) = \frac{2e^x}{e^x-2}$

b) $G'(x) = \ln(x-1)$

c) $H'(x) = 2x - 3$

d) $M'(x) = 3\sqrt{3x+3}$

e) $J'(x) = 2x\, sen^2(2x^2)\cos(2x^2) - sen^2 2x\, cos2x$

f) $R'(x) = \frac{2-x^2}{x^4+x^2} \cdot 2x - \frac{2-3x}{9x^2+3x} \cdot 3$

10.- a) $4\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}\, sen\, 2 \simeq 0{,}4546$

d) $18 - 2\ln 3 \simeq 15{,}803$ e) $-\frac{1}{16}$ f) $-\frac{80}{3}$

g) $\frac{5}{2} ln45 - \frac{7}{3} Arctag2 - \frac{5}{2}\ln 18 + \frac{7}{3} Arctag\ 1 \simeq 1{,}54$

h) $\frac{e^2}{4} + \frac{13}{4} \simeq 5{,}097$

i) $15 - 4\sqrt{6} - 8\ln\left|\sqrt{6}-2\right| \simeq 11{,}599$

j) $\ln 3 - 2\ln 6 + 2\ln 4 = \ln\left(\frac{3\cdot 16}{36}\right) = \ln 473 \simeq 0{,}2877$

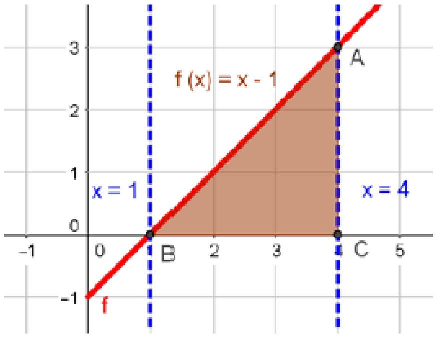
k) $0{,}2169$

l) $3 - 4\ln 2 \simeq 0{,}2274$

m) $\frac{5\pi}{2} \simeq 7{,}854$

n) $\frac{1}{2}\ln|5 - e^{-2}| - \ln 4 \simeq 0{,}0979$

p) $e - \frac{2}{e} \simeq 1{,}9825$



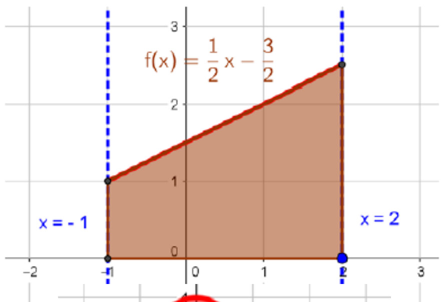
11.- a) Por métodos geométricos podemos hacer las gráficas correspondientes y ver que es un triángulo rectángulo cuya área es:

$$A = \frac{BASE \cdot ALT}{2} = \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5\ u^2$$

Por medio de integrales:

$$S = \int_1^4 (x-1)dx = \frac{9}{2}\ u^2$$

b) Por métodos geométricos podemos hacer las gráficas y observar que se trata de un trapecio cuya área es:



$$A = \frac{(B_{may} + b_{men}) \cdot alt}{2} = \frac{(2{,}5+1)\cdot 3}{2} = 5{,}25\ u^2$$

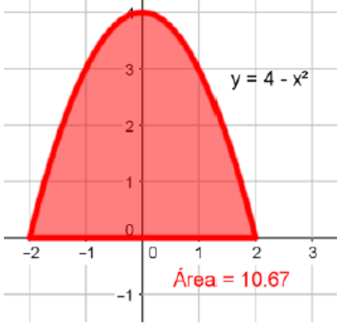
Por medio de integrales:

$$S = \int_{-1}^{2} \left(\frac{x+3}{2}\right)\ dx = \frac{21}{4} = 5{,}25\ u^2$$

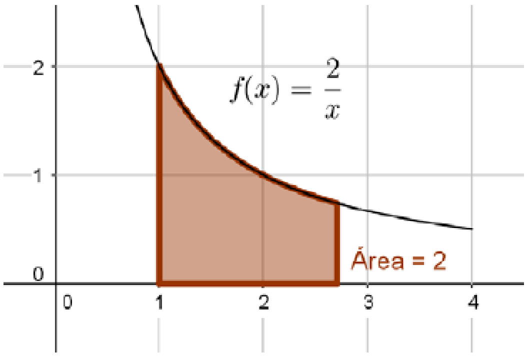
12.- $S = \int_{-2}^{2} (4-x^2)dx = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}\ u^2$

Por simetría también se puede hacer (un poco más fácil):

$$S = 2 \cdot \int_0^2 (4-x^2)dx = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \simeq 10{,}67\ u^2$$



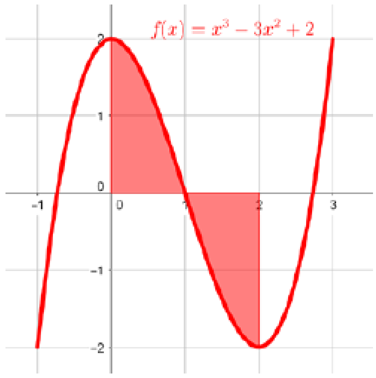
13.- Hacemos una gráfica aproximada y visualizamos la región correspondiente.



$$S = \int_1^e \frac{2}{x}\,dx = [2\ln|x|]_1^e$$

$$S = 2\,lne - 2\ln 1 = 2\,u^2$$

14.- Podemos observar que hay dos recintos cuya área debemos calcular:



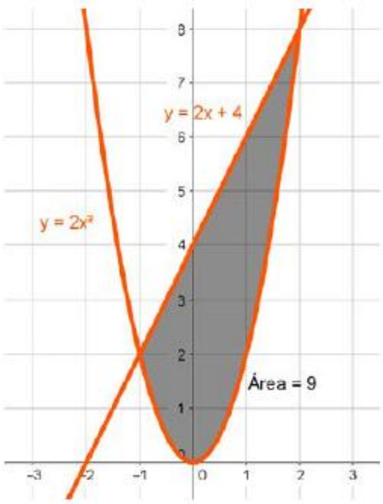
$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2)dx = \frac{5}{4} \quad \rightarrow S_1 = \frac{5}{4}\,u^2$$

$$\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2)dx = -\frac{5}{4} \quad \rightarrow S_2 = \left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}\,u^2$$

$$\boxed{S_{TOTAL} = S_1 + S_2 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5\,u^2}$$

Por simetría podemos hacerlo un poco más fácil ya que los dos recintos son iguales: $\boxed{S_{TOTAL} = 2 \cdot \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2)dx = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2} =}$ $\boxed{2{,}5\,u^2}$

15.- Buscamos los puntos de corte, hacemos las gráficas y observamos una única región cuya área es:

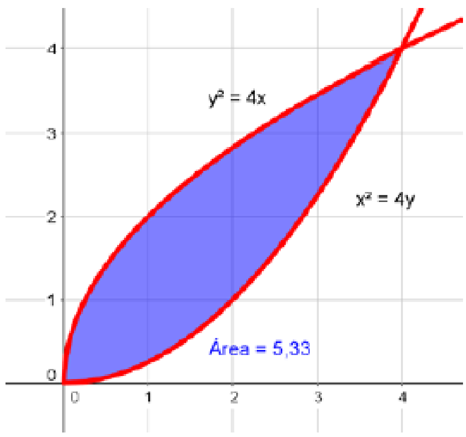


$$S = \int_{-1}^{2} [\,(2x + 4) - (2x^2)]\; dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} [\,2x + 4 - 2x^2]\,dx = 9\,u^2$$

16.- a) Encontramos los puntos de corte entre ambas, hacemos una gráfica aproximada y tendremos: A(0,0) y B(4,4).

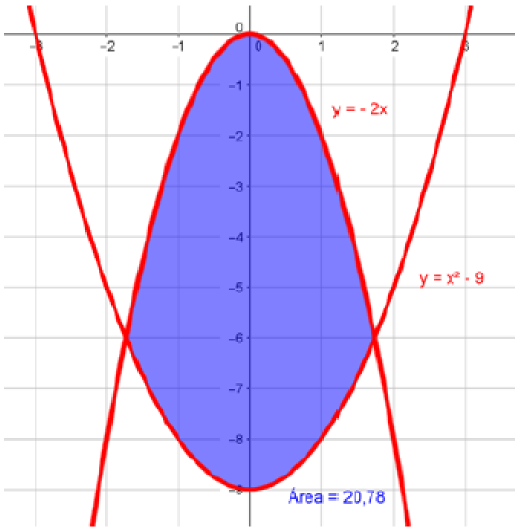
Haremos la integral de la que va por arriba menos la que va por debajo



$$S = \int_0^4 \left[\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4}\right]\; dx = \frac{16}{3}\;u^2$$

b) Encontramos los puntos de corte entre ambas, hacemos una gráfica aproximada y tendremos: $A\left(-\sqrt{3},-6\right) \quad y \quad B(\sqrt{3}\,,-6)$

Por simetría haremos el área desde el 0 hasta la raíz de 3 y luego multiplicamos por dos.

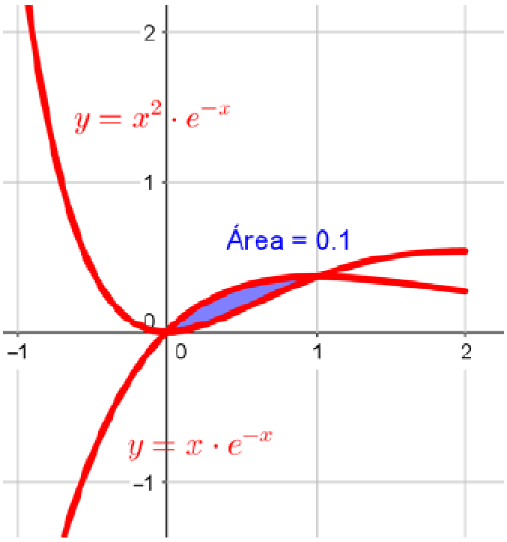


$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} [-2x^2 - (x^2 - 9)\,]\ dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} [-3x^2 + 9)\,]\ dx \ = 12\sqrt{3}\, u^2$$

c) Encontramos los puntos de corte entre ambas, hacemos una gráfica aproximada y tendremos: A(0,0) y B(1, 1/e)

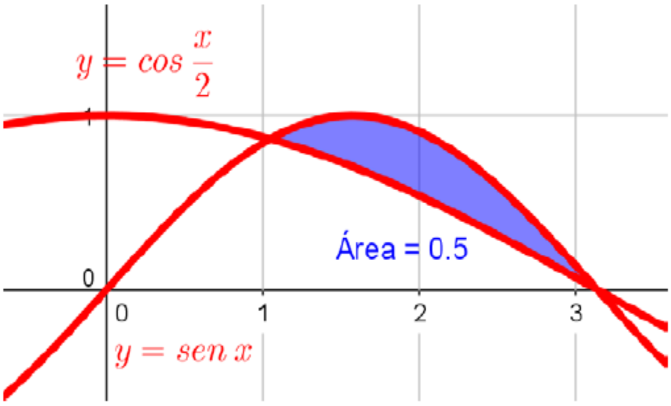
Una vez más, haremos el área restando la gráfica que va por arriba menos la que va por debajo



$$S = \int_0^1 [x\, e^{-x} - \ x^2\, e^{-x})\,]\ dx$$

$$\boxed{S = \frac{3}{e} - \ 1 \ \ \simeq 0{,}1036\, u^2}$$

d) Encontramos los puntos de corte entre ambas, hacemos una gráfica aproximada y tendremos: $(\pi, 0) \quad y \quad B\left(\frac{\pi}{3}\,, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



$$S = \int_{\pi/3}^{\pi} \left[sen\; x - \cos\frac{x}{2}\right]\ dx$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \ \ = \ \ 0{,}5\, u^2}$$

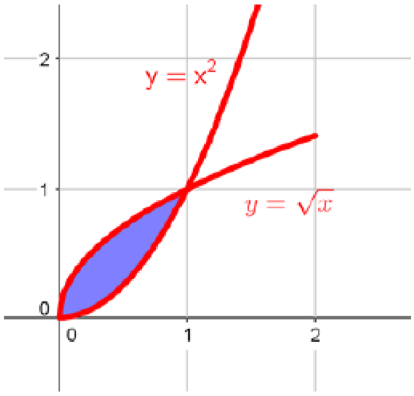
18.-NO EVAU

a) $V = \pi \int_2^3 y^2 \ \ dx \ = \pi \int_2^3 (2x-4)^2 \ \ dx \ = \frac{256}{3} \pi \ u^3$

b) $V = \pi \int_0^{\pi/2} y^2 \ \ dx \ = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \ \ dx \ = \frac{1}{4} \pi \ u^3$

c) $V = \pi \int_{-1}^0 y^2 \ \ dx \ = \pi \int_{-1}^0 (e^{-x})^2 \ \ dx \ = \frac{e^2-1}{2} \pi \ u^3$

d) En la figura se puede ver el recinto que debemos girar y por tanto el volumen será la diferencia entre el volumen que genere la curva de arriba menos el que genere la que va por debajo:



$V = V_1 - V_2$

$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx \ - \pi \int_0^1 (x^2)^2 \ dx$

$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) \ \ dx \ = \frac{3}{10} \pi \ u^3$

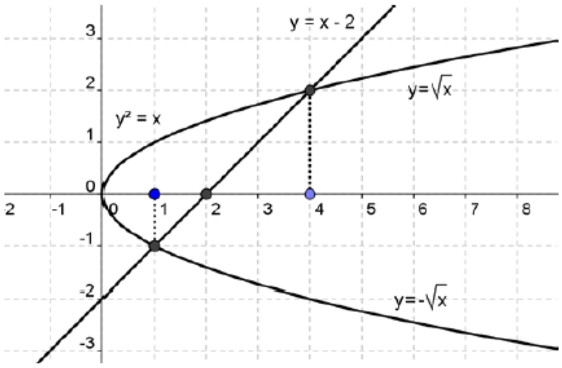
ACTIVIDADES ACCESO A LA UNIVERSIDAD pag. 350

3.- a) Para que sea continua debe ser a=7/3 y b= 2/3

b) Para hacer la integral entre 3 y 4 sólo hay que utilizar la tercera rama.

$$\int_3^4 f(x)\ \ dx\ =\ \int_3^4 \frac{x-5}{(x+1)^2}\ \ dx\ \ =\ \ln 5-\ln 4-\frac{3}{10}\ \simeq\ -0{,}0769$$

6.- Calculamos los puntos de corte y representamos aproximadamente las curvas.
Para calcular el área del recinto debemos dividirlo en tramos:



Uno desde 0 hasta 1 (S_1) que como es simétrico haremos el área de arriba y lo multiplicamos por dos.

$$S_1=2\int_0^1 \sqrt{x}\ \ dx\ =2\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1\ =\frac{4}{3}$$

El otro desde 1 hasta el 4 (S_2) que será la resta de la que va por arriba menos la que va por debajo.

$$S_2=\int_1^4\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]\ dx\ =\ \int_1^4\left[\sqrt{x}-x+2\right]\ dx\ =\ \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^4$$

$$S_2=\left(\frac{16}{3}-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{19}{6}$$

$$S_{TOTAL}=\frac{4}{3}+\frac{19}{6}\ =\frac{9}{2}\ \ =4{,}5\ u^2$$

También se puede hacer integrando respecto al eje OY con las funciones $\begin{cases}x=y^2\\ x=y+2\end{cases}$

$$S_{TOTAL}=\ \int_{-1}^{2}[y+2-y^2]dy=\left[\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}\ u^2$$

7.- a) $\ln e^t\ -\ \ln|1+e^t|+\ C$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\ =\ \frac{0}{0}=(L'Hóp)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x))}{1}=\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+e^x}}{1}\ =\ \frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2}$

10.- Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ \rightarrow\ \ \ f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$$\int f(x)dx=\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx+C$$

-Pasa por el punto: $P(1{,}0)\ \ \rightarrow\ \ f(1)=0\ \ \ \rightarrow \boxed{a+b+c+d=0}$

-El punto de tangencia es. $Si\ x=0\ \ \rightarrow\ \ y=2\cdot 0+1=1\ \ \rightarrow A(0{,}1)$

Como también pasa por el P. de tangencia $f(0)=1\rightarrow\ \boxed{1=0+0+0+d}$

-La pendiente en A(0,1) es m=2, luego: $f'(0)=2\ \ \rightarrow\ \ \boxed{0+0+c=2}$

-La integral vale 3, luego: $\rightarrow\ \boxed{\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d=3}$

Resolviendo el sistema se obtiene: a = -24 ; b=21 ; c=2 ; d=1

Luego la función buscada es: $\boxed{f(x)=-24x^3+21x^2+2x+1}$