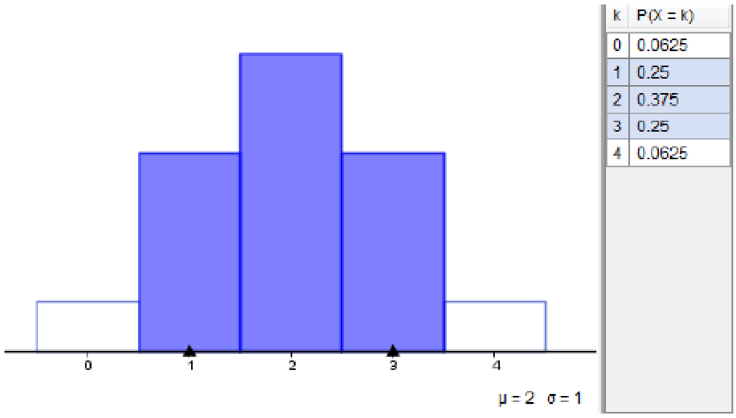
MATEMÁTICAS -II
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL TEMA 15. LA BINOMIAL

<u>Página 400, 401 y 402</u>

1.- a) Haciendo un recuento sencillo de todos los casos posibles. La función de probabilidad es:

Número de caras (X)	0	1	2	3	4
Probabilidad	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

b)



c) $\mu = \sum X_i \cdot P_i = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$

$\sigma = \sqrt{\sum (X_i)^2 . P_i - \mu^2} = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - 4} = \sqrt{1} = 1$

Como es una distribución binomial B(4, ½) también se podía haber hecho:

$\mu = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1$

2.- a) Hay 28 fichas en total, haciendo un recuento la función de probabilidad será:

Diferencia de puntos (X)	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	7/28	6/28	5/28	4/28	3/28	2/28	1/28

b) $\mu = 0 \cdot \frac{7}{28} + 1 \cdot \frac{6}{28} + 2 \cdot \frac{5}{28} + 3 \cdot \frac{4}{28} + 4 \cdot \frac{3}{28} + 5 \cdot \frac{2}{28} + 6 \cdot \frac{1}{28} = \frac{56}{28} = 2$

$\sigma = \sqrt{0 + 1^2 \cdot \frac{6}{28} + 2^2 \cdot \frac{5}{28} + 3^2 \cdot \frac{4}{28} + 4^2 \cdot \frac{3}{28} + 5^2 \cdot \frac{2}{28} + 6^2 \cdot \frac{1}{28} - 4} = \sqrt{3} = 1{,}732$

3.- a) La función de probabilidad es:

$P(0 - Ases) = P(\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} \cdot \frac{33}{37} = 0{,}6445$

$P(1 - As) = P(A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}) + P(\bar{A}, A, \bar{A}, \bar{A}) + P(\bar{A}, \bar{A}, A, \bar{A}) + P(\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, A) = 0{,}3125$

$P(2 - Ases) = 6 \cdot P(A, A, \bar{A}, \bar{A}) = 6 \cdot 0{,}006894 = 0{,}0414$

$P(3 - Ases) = 4 \cdot (P(A, A, A, \bar{A}) = 4 \cdot 0{,}0003939 = 0{,}0016$

$P(4 - Ases) = P(A, A, A, A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{40} \cdot \frac{2}{40} \cdot \frac{1}{40} = 0{,}00001$

Número de ases(X)	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,6445	0,3125	0,0414	0,0016	0,00001

Observa que la suma de las probabilidades debería dar uno (falla por redondeos)

b) $P(X \geq 2) = 0{,}0414 + 0{,}0016 + 0{,}00001 = 0{,}04301$

c) $P(x \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - 0{,}00001 = 0{,}99999$

4.- Sabemos que: $\begin{cases} \sum P_i = 1 & \rightarrow \quad 0,2 + x + 0,45 + y = 1 \\ \mu = 1,45 & \rightarrow \quad 0 + 1 \cdot x + 2 \cdot 0,45 + 3 \cdot y = 1,45 \end{cases}$ $\| \rightarrow x = 0,25 \ ; y = 0,1$

$\sigma = \sqrt{0 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,45 + 3^2 \cdot 0,1 - (1,45)^2} = 0,921$

5.- Si construimos la función de probabilidad para los distintos valores de X:

X	1	2	3	4
P	0	t	2t	3t

Como $\sum P_i = 1 \rightarrow \quad t + 2t + 3t = 1 \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{6}$

$\boxed{\mu = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}}$

$\boxed{\sigma = \sqrt{1^2 \cdot 0 + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{2}{6} + 4^2 \cdot \frac{3}{6} - \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,745}$

6.- a) Como $\sum P_i = 1 \rightarrow \quad m + 3m^3 + 3m^2 - 2m + m^3 + m^2 = 1 \quad \rightarrow m = -1; m = -\frac{1}{2} \ ; m = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{La única respuesta válida es m=1/2}}$ y quedará: $P(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} & Si \ X = 1 \\ \frac{1}{8} & Si \ X = 2 \\ \frac{3}{8} & Si \ X = 3 \end{cases}$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} = \boxed{0,5}$

$P(1 \leq X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = \boxed{0,625}$

8.- **No es justo** porque la esperanza de ganar es $10 \cdot \frac{2}{10} = 2$ y la de perder es: $0,15 \cdot \frac{8}{10} + 2 = 2,12$

9.- Sea X="Número de hijas de una familia de 5 vástagos". Es una distribución Binomial $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$

a) La tabla correspondiente es:

Número de Hijas (X)	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

b) La esperanza matemática es $\mu = 0 + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{2} = 2,5$ Como es una binomial es mucho más fácil $\boxed{\mu = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5}$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,12$

Recordemos, aunque no se suele pedir, que la varianza es $v = \sigma^2 = npq = \frac{5}{4} = 1,25$

c) $P(X \geq 3) = \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} = 0,5$

d) $P(x \leq 1) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} = 0,1875$

10.- a) Si no quieres hacer cuentas (es muy pesado) busca en la tabla que hay en el libro (pag.393). Sale la función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,0007	0,0079	0,0413	0,1239	0,2322	0,2787	0,2096	0,0896	0,0168

b) $\mu = np = 8 \cdot 0,6 = 4,8$ $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 1,386$

c) P(X=5)=0,2787 ; P(X<2) = 0,0007+0,0079 = 0,0086 ; $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,9993$

* 11.- En primer lugar si P(C)=3P(X) y P(C)+P(X)=1 ; tenemos que P(C) =3/4 y P(X)=1/4

Sea X="número de caras que salen en 5 lanzamientos". Es una Binomial B(5 , 3/4)

Sea Y="número de cruces que salen en 5 lanzamientos". Es una Binomial B(5 , 1/3)

a) Es una distribución Binomial B(5 , ¾) . Podemos construir la tabla función de probabilidad completa pero no hace falta: $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{16} = \frac{135}{512} = 0,2637$

b) Podemos hacerlo de dos formas:

1ª .- P(4cruces)=P(1Cara) = $P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4=0{,}01465$

2ª.- $P(4cruces)=P(Y=4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=0{,}01465$

* 12.- Sea X=”número de galletas enteras en un paquete de 10”. Es una Binomial B(10; 0,99) luego:

$P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot(0{,}99)^{10}\cdot(0{,}01)^0=1\cdot\ 0{,}9044\cdot 1\ =0{,}9044$

*13.- Sea X=”número de alumnos que cogen Biología en 16 alumnos”. Es una Binomial B(16; 0,7)
Sea Y=”número de alumnos que no cogen Biología en 16 alumnos”. Es una Binomial B(16;0,3)

a) P(Ninguno Biología)=$P(Y=16)=\binom{16}{16}(0{,}3)^{16}.(0{,}7)^0=1\cdot\ 4{,}3\cdot10^{-9}\cdot1=4{,}3\cdot10^{-9}$

b) $P(X\geq14)=P(X=14)+P(X=15)+P(X=16)=\ 0{,}0994$

c) $P(Y\leq3)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)=\ 0{,}2459$

También se puede hacer de otra forma: P(máx 3 no cogen Bio)=P(por lo menos 13 SI)

$P(X\geq13)=P(X=13)+\ P(X\geq14)=0{,}1465+0{,}0994=0{,}2459$

14.- Sea X=”número de vecinos que tienen internet de un total de 20” . Es una Binomial B(20 ; 0,75)

$P(X\geq18)=\ P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)=0{,}0913$

El número de conexiones a internet que cabe esperar será: $\mu=20\cdot0{,}75=15$

*15.- Sea X=”número de enfermos que son fumadores entre 20 que tienen cáncer”. Binomial B(20 ; 0,85)

$P(X\geq18)=\ P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)=0{,}4049$

$P(X=0)=\ \binom{20}{0}(0{,}85)^0\cdot(0{,}15)^{20}=3{,}325\ \cdot10^{-17}$

*16.- Sea X=”número de frases acertadas de las 10 propuestas” . Como la probabilidad de acertar en cada frase es P(A)=1/3 , estamos ante una Binomial B(10, 1/3)

$P(X>6)=\ P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\ =0{,}0197$

*17.- Sea X=”Nº de trenes que llegan a su hora de los 16 que pasan”. Es una Binomial B(16 ; 0,98).

$P(8<X<12)=P(X=9)+P(X=10)+P(X=11)=1{,}162\cdot10^{-5}$

18.- La media de fallos es $\mu=\frac{154}{500}=0{,}308$. Si la queremos ajustar a una Binomial tiene que ser:

$\mu=n\cdot p\ \ \rightarrow\ \ 0{,}308=3p\ \ \rightarrow p=0{,}1$

Sea X=”número de componentes que fallan de los 3 que tiene cada dispositivo”.
Estamos ante una Binomial B(3 ; 0,1)

Si hacemos una tabla para comparar los datos obtenidos experimentalmente con los que predice la Binomial, tenemos:

X	*P(Xi)*	Valores teóricos esperados $(500\cdot P)$	Valores Observados	Diferencia
0	$1\cdot1\cdot0{,}9^3=0{,}729$	$500\cdot0{,}729=364{,}5\cong365$	361	4
1	$3\cdot0{,}1\cdot0{,}9^2=0{,}243$	$500\cdot0{,}243=121{,}5\cong122$	124	2
2	$3\cdot0{,}1^2\cdot0{,}9=0{,}027$	$500\cdot0{,}027=13{,}5\cong14$	15	1
3	$1\cdot0{,}1^3\cdot1=0{,}001$	$500\cdot0{,}001=0{,}5\cong1$	0	1

Las diferencias son bastante pequeñas (recuerda que hay 500 datos) por lo que se ajusta bastante a una distribución Binomial.

b) Para hacer la estimación podemos utilizar la Binomial B(3 ; 0,1)

$P(Fallen\ al\ menos\ 2)=\ P(X=2)+P(x=3)=0{,}027+0{,}001=0{,}0271$

Con los datos del experimento sería $P(Fallen\ al\ menos\ 2)=\frac{15+0}{500}=0{,}03$ que es bastante parecido

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD - Pag. 402

1.- $P(1) = t$; $P(2) = 2t$; $P(3) = 3t$ ……… Como la suma es 1 se tiene que $21t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{21}$

Número que sale (X)	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

*2.- Sea X="Número de coches que duran más de un año sin fallos de 15". Es una Binomial B(15 ; 0,9)

$P(11 < X < 14) = P(X = 12) + P(X = 13) = \binom{15}{12} \cdot (0,9)^{12} \cdot (0,1)^3 + \binom{15}{13} \cdot (0,9)^{13} \cdot (0,1)^2 = 0,3954$

El número de vehículos esperado sin fallos es la esperanza matemática $\mu = n \cdot p = 15 \cdot 0,9 = 13,5$

Seguro que el comercial del concesionario afirma: "Unos 14 de los 15 coches no se averían"

*3.- Sea X="Número de pacientes CON efectos secundarios de 12". Es una Binomial B(12 ; 0,08)

a) $P(X = 0) = 0,92^{12} = 0,3677$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0,0652$

c) Es la esperanza matemática para la variable X: $\mu = 12 \cdot 0,08 = 0,96 \cong 1\ paciente$

*4.- Sea X="Número de preguntas acertadas al azar de 18 cuestiones". Es una Binomial B(18 ; 1/5)

a) $P(Aprobar) = P(X \geq 12) = P(12) + P(13) + P(14) + P(15) + P(16) + P(17) + P(18)$

$\boxed{P(Suspender) = 1 - P(Aprobar) = 1 - 2,2453 \cdot 10^{-5} = 0,99998}$

"Lo que demuestra que si no estudias lo más seguro es que suspendas"

b) $P(Sobresaliente) = P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) = 6,609 \cdot 10^{-10}$

"Esto ya sería un milagro"

5.- Esto no se corresponde con una Binomial. Debemos calcular la esperanza matemática que será el porcentaje que, en promedio, se espera obtener: $\mu = 5 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,3 + 11 \cdot 0,2 = 8,2\%$

Por lo tanto se espera obtener un 8,2% de 10.000€, es decir: $\boxed{R = 0,082 \cdot 10.000 = 820€}$

6.- La media de saltos nulos es $\mu = \frac{288}{300} = 0,96$. Si la ajustamos a una Binomial tiene que ser:

$\mu = n \cdot p \rightarrow 0,96 = 3p \rightarrow p = 0,32$

Sea X="número de saltos nulos de un total de 3 saltos" Estamos ante una Binomial B(3 ; 0,32)

Si hacemos una tabla para comparar los datos obtenidos experimentalmente con los que predice la Binomial, tenemos:

X	$P(X_i)$	Valores teóricos $(300 \cdot P)$	Valores Observados	Diferencia
0	$0,68^3$=0,3144	$300 \cdot 0,3144 = 94,32 \cong 94$	114	20
1	$3 \cdot 0,32 \cdot 0,68^2 = 0,4439$	$300 \cdot 0,4439 = 133,17 \cong 133$	100	33
2	$3 \cdot 0,32^2 \cdot 0,64 = 0,2089$	$300 \cdot 0,2089 = 62,67 \cong 63$	70	7
3	$0,32^3$=0,0328	$300 \cdot 0,0328 = 9,84 \cong 10$	16	6

Las diferencias son bastante grandes, luego podemos afirmar que los datos iniciales no se corresponden con una distribución Binomial.

*7.- Sea X="nº de electrones que se encuentran en el orbital de 6 en total" Es una Binomial B(6 ; 0,99)

$\boxed{P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} \cdot (0,99)^5 \cdot (0,01)^1 + \binom{6}{6} \cdot (0,99)^6 = 0,9985}$

*8.- Sea X="Nº de veces que sale el 6 al lanzar 6 veces un dado". Es una Binomial B(6, 1/6)

$\boxed{P(al\ menos\ un\ 6) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - 0.3349 = 0,6651}$

Sea Y="Nº de veces que sale el 6 doble al lanzar dos dados 6 veces". Es una Binomial B(6,1/36)

$\boxed{P(al\ menos\ un\ 6\ doble) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 1 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^6 = 0,1555}$

*9.- Sea X="Nº de personas que tiene móvil en un grupo de 20". Es una Binomial B(20 ; 0,75)

a) $\boxed{P(X \leq 19) = 1 - P(X = 20) = 1 - \binom{20}{20} \cdot (0,75)^{20} = 1 - 0.0032 = 0,9968}$

b) $\boxed{P(X \leq 17 /\ X \leq 19) = \frac{P(X \leq 17\ \cap\ X \leq 19)}{P(X \leq 19)} = \frac{P(X \leq 17)}{P(X \leq 19)} = \frac{1 - P(X=18) - P(X=19) - P(X=20)}{0,9968} = 0,9116}$

10.- Sea X="Nº de veces que sube al pódium en n-carreras". Es una Binomial B(n ; 0,4)

$P(X \geq 1) > 0,7 \rightarrow 1 - P(X = 0) > 0,7 \rightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^n > 0,7$

Por lo tanto $1 - (0,6)^n > 0,7 \rightarrow 0,3 > (0,6)^n \rightarrow n > 2,36$

$\boxed{\text{Sol; Debe correr en 3 carreras por lo menos.}}$