MATEMÁTICAS -II

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL TEMA 16. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Página 424, 425 y 426

(*)3.- a) 0,8944 b) 0,226 c) 0,0594 d) 0,251

(*)4.- En la tabla de la distribución normal encontramos:
a) a= 2,48 b) a=1,36 c) a= 2,10 d) -1,28

(*)5.- Tipificamos la variable y después consultamos la tabla N(0,1)
a) 0,5636 b) 0,6554 c) 0,2266 d) 0,3829

6.- Calculamos la z-crítica que corresponde a esa probabilidad con la tabla Normal y luego obtenemos el valor de K.

a) $P(X \leq k) = 0{,}7157 \ \rightarrow \ z_c = 0{,}57 \ \rightarrow \ \frac{k-6}{2} = 0{,}57 \ \rightarrow$ **k = 7,14**

b) $P(X \geq k) = 0{,}3557 \ \rightarrow \ P(X \leq k) = 0{,}6443 \ \rightarrow \ z_c = 0{,}37 \ \rightarrow$
$\frac{k-6}{2} = 0{,}37 \ \rightarrow \ \boldsymbol{k = 6,74}$

c) $P(6 \leq X \leq k) = 0{,}4975 \ \rightarrow \ P(X \leq k) - P(X \leq 6) = 0{,}4975$
$P(Z \leq z_c) - P(Z \leq 0) = 0{,}4975 \ \rightarrow P(Z \leq z_c) = 0{,}4975 + 0{,}5 \ \rightarrow$
$P(Z \leq z_c) = 0{,}9975 \ \rightarrow \ z_c = 2{,}81 \ \rightarrow \frac{x-6}{2} = 2{,}81 \ \rightarrow$ **k=11,62**

d) $P(6 - k \leq X \leq 6 + k) = 0{,}7606 \ \rightarrow \ P(X \leq 6 + k) = 0{,}8803 \ \rightarrow z_c = 1{,}176$
$\frac{(6+k) - 6}{2} = 1{,}176 \ \rightarrow \ \boldsymbol{k = 2,352}$

(*)7.- $P(18 \leq X \leq 30) = P(-0{,}3 \leq Z \leq 0{,}9) = P(Z \leq 0{,}9) - P(Z \leq -0{,}3) =$
$= 0{,}8159 - (1 - 0{,}6179) = \boldsymbol{0,4338}$

8.- a) P(X>160 000) = **0,0062**
b) $P(125000 < X < 155000) = 0{,}9392 \cong \boldsymbol{94}\%$

(*)9.- Tenemos que $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{0{,}7225} = 0{,}85$ Luego es una normal N(10’5,0’85)
a) P(X<10)=**0,2728**
b) P(X>10,4) =**0,5468**

(*)10.- $P(115 \leq X \leq 125) = P(X \leq 125) - P(X \leq 115) = 0{,}2185$
El número de alumnos esperado es $0'2185 \cdot 800 = 174'8 \ \cong \ \boldsymbol{175\ alumnos}$

(*)11.- $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 10) = 0{,}1587 \ \cong \ \boldsymbol{16}\%$

12.- $P(X \leq 230) + P(X \geq 260) = 0{,}095 \rightarrow$ **El 9,5% se considera mala calidad**

13.- a) Calculamos la media y la desviación típica con las fórmulas de estadística:
$\mu = 7{,}164 \qquad \sigma = 0{,}756$
b) $P(7{,}5 \leq X \leq 8{,}5) = 0{,}2898$

14.- a) $P(12 \leq X \leq 20) = 0{,}7936$

b) $P(X \geq t) = 0{,}08 \ \rightarrow \ P(Z \geq z_c) = 0{,}08 \ \rightarrow \ P(Z \leq z_c) = 0{,}92 \ \rightarrow$
$z_c = 1{,}41 \ \rightarrow \ \frac{t-15}{3} = 1{,}41 \ \rightarrow \ \boldsymbol{t = 19,23\ min}.$

(*)15.- La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{0{,}0225} = 0{,}15$

$P(X \geq 1{,}8) = 0{,}2 \ \rightarrow \ P(Z \geq z_c) = 0{,}2 \ \rightarrow \ P(Z \leq z_c) = 0{,}8 \ \rightarrow$

$z_c = 0{,}84 \ \rightarrow \ \frac{1{,}8-\mu}{0{,}15} = 0{,}84 \ \rightarrow \ \boldsymbol{\mu = 1{,}674\ kg}.$

16.- $P(X \geq 380) = 0{,}006 \ \rightarrow \ P(Z \geq z_c) = 0{,}006 \ \rightarrow \ P(Z \leq z_c) = 0{,}9940 \ \rightarrow$

$z_c = 2{,}51 \ \rightarrow \ \frac{380-300}{\sigma} = 2{,}51 \ \rightarrow \ \boldsymbol{\sigma = 31{,}87\ mm}.$

17.- Plateamos un sistema con μ y σ como incógnitas:

$$\begin{cases} P(X \geq 100) = 0{,}20 & \rightarrow \ \frac{100-\mu}{\sigma} = 0{,}8416 \\ P(X \leq 60) = 0{,}08 & \rightarrow \ \frac{60-\mu}{\sigma} = -1{,}4051 \end{cases} \quad \| \rightarrow \| \begin{matrix} \mu = 85{,}02\ Km/h \\ \sigma = 17{,}80\ km/h \end{matrix}$$

(*) 18.- Sea X=" Número de caras en 500 lanzamientos". Es una Binomial B(500,1/2)

Claramente la podemos aproximar por la Normal: $\begin{cases} \mu = n \cdot p = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{125} \cong 11{,}18 \end{cases}$

Sin hacer la corrección de continuidad tenemos:

$P(230 \leq X \leq 260) = P(-1{,}79 \leq Z \leq 0{,}89) = P(Z \leq 0{,}89) - P(Z \leq -1{,}79) =$
$= 0{,}8133 - (1 - 0{,}9633) = \mathbf{0{,}7766}$

Haciendo la corrección de continuidad se obtendrá:

$P(230 \leq X \leq 260) = P(229{,}5 \leq X' \leq 260{,}5) = P(-1{,}83 \leq Z \leq 0{,}94) =$
$= P(Z \leq 0{,}94) - P(Z \leq -1{,}83) = 0{,}8264 - (1 - 0{,}9664) = \mathbf{0{,}7928}$

Como se ve hay una pequeña diferencia teniendo en cuenta la corrección o no. En la EvAU no es necesario que la tengas en cuenta, pero está mejor haciéndolo.

(*)19.- Sea X="Número de aviones con retraso de 250" Es una Binomial B(250 , 0'05) . Aunque la "p" está bastante alejada de 0,5 como "n" es muy grande, la aproximaremos a una normal que será: N(12'5 , 3'45)

a) $P(X \geq 200) = P(X' \geq 199'5) = P(Z \geq 54{,}2) = 1 - P(X \leq 54{,}2) \cong 1 - 1 = \mathbf{0}$

b) $P(X \leq 20) = P(X' \leq 20{,}5) = P(Z \leq 2{,}32) = \mathbf{0{,}9898}$

(*)20.- Sea X="Número de tarjetas sin fondos de 400" Es una Binomial B(400 , 0'12) . Aunque la "p" está bastante alejada de 0,5 como "n" es muy grande, la aproximaremos a una normal que será: N(48 , 6'5)

a) $P(X \leq 80) = P(X' \leq 80'5) = P(Z \leq 5) \cong \mathbf{1}$

b) $P(40 \leq X \leq 60) = P(39'5 \leq X' \leq 60{,}5) = P(-1{,}31 \leq Z \leq 1{,}92) = \mathbf{0{,}8775}$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD - Pag. 426

2.- Sea “a” la nota que debe obtener.

$P(X \geq a) = 0{,}10 \quad \rightarrow \quad P(X \leq 0{,}90) \quad \rightarrow \quad P(Z \leq z_c) \leq 0{,}90 \quad \rightarrow \quad z_c = 1{,}28$

$\frac{a-45}{2} = 1{,}28 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 47{,}56\ puntos}$

3.- Sabemos que P(X>1500)=0,1314 Buscamos la z-crítica (z_c) que corresponde a esa probabilidad. $P(Z \geq z_c) = 0{,}1314 \quad \rightarrow \quad P(Z \leq z_c) = 0{,}8686 \rightarrow \quad z_c = 1{,}12$

Entonces tenemos $\frac{1500-1000}{\sigma} = 1{,}12 \quad \rightarrow \quad \frac{500}{\sigma} = 1{,}12 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma = 446{,}43}$

(*)5.- Como la desviación típica es $\sigma = \sqrt{16} = 4$ tenemos que el IMC sigue una $N(\mu\ , 4)$

Nos dicen que $P(X > 22{,}5) = 0{,}0668$. Buscamos la z-crítica (z_c) que corresponde a esa probabilidad. $P(Z \geq z_c) = 0{,}0668 \quad \rightarrow \quad P(Z \leq z_c) = 0{,}9332 \rightarrow \quad z_c = 1{,}50$

Entonces tenemos $\frac{22{,}5-\mu}{4} = 1{,}50 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\mu = 16{,}5}$

6.- a) $P(X > 13) = P\left(Z \geq \frac{13-12}{2{,}5}\right) = P(Z \geq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \mathbf{0{,}3446}$

b) $P(X < 13{,}5/X > 13) = \frac{P(X>13\ \cap X<13{,}5)}{P(X>13)} = \frac{P(13<X<13{,}5)}{P(X>13)} = \mathbf{0{,}2041}$

(*)7.- Sea X=”Número de bolas metidas en el hoyo de 50 lanzamientos” Es una B(50 , 0’3)

$\mu = 50 \cdot 0'3 = 15 \quad ; \quad \sigma = \sqrt{50 \cdot 0'3 \cdot 0'7} = 3'24$

Podemos aproximarla por una normal N(15, 3’24)

$P(20 \leq X \leq 30) = P(19{,}5 \leq X' \leq 30'5) = P(1{,}39 \leq Z \leq 4'78) =$

$= P(Z \leq 4{,}78) - P(Z \leq 1{,}39) = 1 - 0{,}9177 = \mathbf{0{,}0823}$

(*)8.- Primero calculamos $\sigma = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8\ mm$ Por lo tanto es una N(5’5 , 0’8)

$P(4{,}3 \leq X \leq 7{,}1) = P(-1{,}50 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1{,}50) =$

$=0{,}9772 - (1 - 0{,}9332) = \mathbf{0{,}9104 = 91'04}\%$

Para saber cuántos son aprovechables, hay que hacer el 91,04% de 1200 tornillos.

$0{,}9104 \cdot 1200 = 1092'8 \cong \boldsymbol{1093\ tornillos}$

9.- Calculemos la probabilidad en cada una de las sucursales:

- En la sucursal-A Es una normal N(9,1)

$P(X \leq 10) = P(Z \leq 1) = \mathbf{0{,}8413}$

-En la sucursal-B . Es una normal N(8’5 , 2)

$P(X \leq 10) = P(Z \leq 0{,}75) = \mathbf{0{,}7734}$

10.- a) Las notas siguen una Normal $N(\mu\ , \sigma\ )$. Plateamos un sistema con $\mu \quad y \ \sigma$ como incógnitas:

$$\begin{cases} P(X \geq 6) = 0{,}25 \quad \rightarrow P(Z \leq z_c) = 0{,}75 \rightarrow z_c = 0{,}576 \quad \rightarrow \quad \frac{6-\mu}{\sigma} = 0{,}675 \\ P(X \leq 4) = 0{,}30 \quad \rightarrow P(Z \leq z_c) = 0{,}70 \rightarrow z_c = 0{,}525 \quad \rightarrow \quad \frac{4-\mu}{\sigma} = -0{,}525 \end{cases}$$

Sol: $\boxed{\boldsymbol{\mu = 4{,}87\ puntos \quad ; \quad \sigma = 1{,}67\ puntos}}$

b) Ahora sabemos que es una distribución Normal N(4’87 , 1’67)

$P(X \geq 7) = P(Z \geq 1{,}28) = 1 - P(Z \leq 1{,}28) = 1 - 0{,}8997 = 0{,}1003 = 10'03\%$

Aprobarán el 10,03% de los 385 alumnos = $0{,}1003 \cdot 385 = 38{,}62 \cong \boldsymbol{39\ alumnos}$