MATEMÁTICAS -II
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

<u>Página 88 y siguientes</u>

1.- a) Sistema: $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = 6 \\ x + y - 3z = -2 \end{cases}$

Expresión Matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Expresión vectorial: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Matriz Principal: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz Ampliada: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) y c) se hacen de la misma manera.

2.- a) Sistema Incompatible. No tiene solución.
b) S.C.Indet. Grado indeterminación= 2
c) S.C.Det. Sol: x=0 , y= -1 , z=1

3.- a) $Si\ a = 0 \Rightarrow S.C.D. \quad Sol: x = -3\ ;\ y = 6$
$Si\ a = 2 \Rightarrow S.C.D. \quad Sol: x = 1\ ;\ y = 2$
$Si\ a \neq 0 \wedge a \neq 2 \Rightarrow S.Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$

b) $Si\ a = 0 \Rightarrow S.Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$
$Si\ a = -1 \Rightarrow S.C.I.\ (Inf.Sol.)\ Gr.Ind. = 1\ Sol: x = -\lambda - 1\ ;\ y = \lambda\ ; z = 0 \quad \forall \lambda \in R$
$Si\ a \neq 0 \wedge a \neq -1 \Rightarrow S.C.D.\ Sol:\ x = -1 \quad ; y = -\frac{a+1}{2} \quad ;\ z = \frac{a+1}{2}$

c) $Si\ a = 1 \Rightarrow S.C.I.\ (Inf.S.)\ Gr.Ind. = 1\ Sol: x = -3\lambda - 1\ ;\ y = 2\lambda + 1\ ; z = \lambda \quad \forall \lambda \in R$
$Si\ a \neq 1 \Rightarrow S.Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$

4.- a) Por ejemplo una ecuación que tenga los coeficientes de A (c.l. de otros) pero no el término independiente.
b) Una ecuación que sea completamente c.l. de las otras.
c) Una que los coeficientes de A (no sean c.l. de los otros).

5.- a) $Si\ a = -1 \Rightarrow S.Incompatible, no\ tiene\ solución$
b) $Si\ a = 1 \Rightarrow S.C.I.(infinitas\ soluciones)$
c) $Si\ a \neq -1 \wedge a \neq 1 \Rightarrow S.C.D.\ solución$ única
d) Si x=3 tiene que ser una solución, la "a" tiene que valer: a=1 ó a=-4/3

6.- a) S.C.D. $\boxed{\text{Sol: x=-1 ; y=2}}$
b) S.C.D. $\boxed{\text{Sol: x=1 ; y=-2 ; z=0}}$
c) S.C.D. $\boxed{\text{Sol: x=-4 ; y=1 ; z=1}}$

7.- a) $\boxed{\text{x=2 ; y=1}}$
b) $\boxed{\text{x=1 ; y=0 ; z=-1}}$
c) $\boxed{\text{x=2 ; y=-1 ; z=1}}$

8.- Lo son porque las matrices principales son cuadradas y sus determinantes no son cero.

a) $\boxed{x=1\ ;\ y=-2}$ b) $\boxed{x=-1\ ;\ y=2\ ;\ z=0}$ c) $\boxed{x=2\ ;\ y=2\ ;\ z=2}$

9.- a) Los sistemas no son equivalentes porque no tienen la misma solución:

El primero es SCI (Inf. Sol.) y el segundo SCD (una sola solución)

b) Si que son equivalentes porque los dos son SCI y además tienen el mismo conjunto de soluciones: $Sol: x=\frac{4}{3}-3\lambda\ ;\ y=\frac{5}{3}-2\lambda\ ;\ z=3\lambda \quad \forall\lambda\in R$

10.- Ambos sistemas son SCD si $a\neq 4$ sus soluciones son:

SISTEMA-I $x=-\frac{7}{a-4}\ ; y=\frac{4a-2}{a-4}$ SISTEMA-II $x=-\frac{7}{a-4}\ ; y=\frac{2a-1}{a-4}$

Para ser equivalentes tienen que tener la misma solución luego: $\frac{2a-1}{a-4}=\frac{4a-2}{a-4}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

La solución de ambos sistemas en este caso será la misma: x=2 ; y=0

11.- a) $Si\ a\neq 2\wedge a\neq -3 \quad\Rightarrow\quad S.C.D.\ una\ \ solución\ que\ será\ la\ trivial: x=0; y=0; z=0$

$Si\ a=-3\ \Rightarrow S.C.I.\ \ Sol:\ x=2\alpha\ ; y=-5\alpha\ ; z=3\alpha \quad con\ \ \alpha\in\ R$

$Si\ a=2\ \Rightarrow S.C.I.\ \ Sol:\ x=\alpha\ ;\ y=0\ ; z=-\alpha \quad \forall\ \alpha\in\ R$

b) $Si\ a\neq 1\wedge a\neq 7 \quad\Rightarrow\quad S.C.D.\ una\ \ solución\ que\ será\ la\ trivial: x=0; y=0; z=0$

$Si\ a=1\ \Rightarrow S.C.I.\ \ Sol:\ x=\alpha\ ; y=\alpha\ ; z=\alpha \quad \forall\ \alpha\in\ R$

$Si\ a=7\ \Rightarrow S.C.I.\ \ Sol:\ x=5\alpha\ ;\ y=-\alpha\ ; z=17\alpha \quad \forall\ \alpha\in\ R$

c) $Si\ a\neq 1 \quad\Rightarrow\quad S.C.D.\ una\ \ sola\ solución\ que\ será\ la\ trivial: x=0; y=0; z=0$

$Si\ a=1\ \Rightarrow S.C.I.\ \ Sol:\ x=-2\alpha\ ; y=\alpha\ ; z=\alpha \quad con\ \ \alpha\in\ R$

12.- NO EvAU a) $\begin{cases} x-7y-3z=0 \\ 2x+y-3t=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-5y-z-2t=0 \\ x+y+z-2u=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x+y-3z=1 \\ 4x-2y-3t=7 \\ 2x-t+2u=9 \end{cases}$

13.- Efectivamente, los tres números son iguales y son: 1, 1, y 1.

14.- a) El sistema planteado tiene infinitas soluciones (S.C.I.) del tipo:

M= $40.000+\lambda\ ;\ m=20.000+\lambda\ ;\ p=\lambda\ \ con\ \lambda\in\ R$

Luego no podemos saber seguro cuánto hereda cada uno.

ACTIVIDADES DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD.

1.- a) Tienen que ser sistemas equivalentes por lo tanto el sistema de tres ecuaciones tiene que ser SCI (grado indet.=1) como el original. Para esas condiciones a=0

b1) El sistema tiene un conjunto de soluciones de la forma:

$Sol: x = 1 - 11\lambda\,;\ \ y = 1 + 7\lambda\ ;\ z = \lambda \quad \forall\lambda \in R$

Si la suma tiene que dar 4, entonces:

$1 - 11\lambda + 1 + 7\lambda + \lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3}$

luego la solución: $\boxed{x = \frac{25}{3}\ ; y = -\frac{11}{3}\ ; z = -\frac{2}{3}}$

b2) También se puede hacer este apartado resolviendo directamente el sistema añadiendo la ecuación: x+y+z=4

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \boxed{x = \frac{25}{3}\ ; y = -\frac{11}{3}\ ; z = -\frac{2}{3}}$$

2.- a) $Si\ a \neq 0 \wedge a\ \neq 5\ \Rightarrow\ Rag(A) = 3\,; Rag(\bar{A}) = 3\,;\ S.C.D.\ \ (una\ sola\ solución)$

$Si\ a = 0\ \Rightarrow Rag(A) = 2\,; Rag(\bar{A}) = 3\,;\ S.Incompatible\ (no\ tiene\ solución).$

$Si\ a = 5\ \Rightarrow Rag(A) = 2\,; Rag(\bar{A}) = 3\,; S.Incompatible\ (no\ tiene\ solución).$

b) Si a=1 estamos en el caso primero luego tiene una única solución que es:

$\boxed{x=1\ ;\ y=0\ ;\ z=0}$

3.- Debe ser a=-1 . Para ese valor tiene una solución única que es: $\boxed{x = \frac{28}{5}\ ;\ \ y = -\frac{12}{5}}$

4.- Basta con sustituir x=1; y=1 ; z=1 en el sistema y calcular los valores de "a" para que se cumplan las tres ecuaciones. El único valor que verifica las tres es: a=-2.

Si resolvemos el sistema poniendo a=-2 obtendremos que es SCI (infinitas soluciones)

Sol: $Sol: x = \frac{12\lambda-7}{5}\ ;\ \ y = \frac{4\lambda+1}{5}\ \ ; z = \lambda \quad \forall\lambda \in R$

Efectivamente, una de las soluciones es x=1; y=1 ; z=1 , basta con tomar $\lambda = 1$

5.- a) Basta con estudiar los rango y aplicar el Teorema de Rouché.

b) Si sustituimos x, y , z por sus valores queda un sistema con a,b,c como incógnitas:

Sol: a=1 ; b=-1 ; c=1

c) Si estudiamos el sistema con los a,b y c obtenidos en el apartado b) veremos que es SCD.

6.- a) $Si\ m \neq -1 \wedge a\ \neq 1\ \Rightarrow\ Rag(A) = 2\,; Rag(\bar{A}) = 2\,;\ S.C.D.\ \ (una\ solución)$

$Si\ m = 1\ \Rightarrow Rag(A) = 1\,; Rag(\bar{A}) = 1\,;\ S.C.I.(Inf.Sol.)\ \ grado\ indet. = 1.$

$Si\ m = -1\ \Rightarrow Rag(A) = 1\,; Rag(\bar{A}) = 2\,; S.Incompatible\ (no\ tiene\ solución).$

b) Si x= 2 podemos sustituir y obtener la "y" en cada ecuación por separado:

$$\left\| \begin{array}{l} y = 2m - 1 \\ y = \frac{3-2m}{m} \end{array} \right. \quad \text{como tiene que dar lo mismo:} \quad \boxed{m = 1\ ;\ \ m = -\frac{3}{2}}$$

7.- Planteado un sistema acaba siendo incompatible luego algún día nos cobraron mal.

8.- Luis tiene 30 € ; Juan 10€ y Óscar 20€.