MATEMÁTICAS -II

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL TEMA 6.
APLICACIONES DE GEOMETRÍA Y LUGARES GEOMÉTRICOS

<u>Página 164 y siguientes</u>

1.- a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = (2, -7, -3)$ b) $\vec{v} \times \vec{u} = (-2,7,3)$
c) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (-14, -13, 21)$ d) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (10, -4,16)$

2.- a) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ si que forman base.
b) Calcula los tres vectores que te dan y comprueba después que también son Base.

3.- $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|\ sen\,\alpha = 6\sqrt{3}$

4.- Se supone que los vértices van en orden ABCD. El vértice D buscado es $\boxed{D(4,-2,2)}$
El área del paralelogramo es $\boxed{S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |(1, 2, 1)| = \sqrt{6}\ \ u.s. \simeq 2{,}45\, u^2}$

5.- Los vértices del triángulo son: A(-3,0,0) ; B(0,2,0) ; C(0,0,-6)
El área se puede hacer con el producto vectorial $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 3\sqrt{14}\, u^2 \simeq 11{,}22\ u.s.$

6.- El vector director de la recta es perpendicular a los dos vectores normales de los planos:
$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (7,7,7) \sim (1,1,1)$
Para expresar la recta como intersección de dos planos puede hacerse de dos formas distintas:
- r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$

- r: $\begin{cases} 2x - 3y + z + D = 0 & Por\ el\ punto\ P(1,2,3) \Rightarrow D = 1 \\ x + 2y - 3z + D' = 0 & Por\ el\ punto\ P(1,2,3) \Rightarrow D' = 4 \end{cases}$ y la recta quedará:
$r: \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$ parece distinto resultado, pero es equivalente.

7.- No EvAU a) $\boxed{d(M,r) = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{42}} \simeq 1{,}46\, u.}$ b) $\boxed{d(M,s) = \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{14}} \simeq 4{,}09\, u.}$

8.- No EvAU Primero hay que comprobar si son paralelas (lo son porque los planos que las forman lo son).
En este caso basta tomar un punto de una de ellas y se calcula la distancia de éste a la otra recta:
$\boxed{d(r,s) = d(P,s) = 2\sqrt{2}\ u. \simeq 2{,}83\, u.l.}$

9.- a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-6\,, 12\,, 0)$ b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -17$
c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -17$ d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -33$

10.- El punto es la intersección: P(0,2,-1)
El vector director de la recta r que nos dan es. $\vec{r} = (2, -1,1) \times (1,0,4) = (-4, -7,1)$
El vector director de la recta que buscamos $\vec{s}$ tiene que ser perpendicular al normal $\vec{n}$ del plano y al director de la recta que nos dan $\vec{r}$:
$\vec{s} = \vec{n} \times \vec{r}$ = (-15,7,-11)
Finalmente la recta que nos piden será: $\boxed{s: \frac{x}{-15} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{-11}}$

11.- Calculamos la ecuación del plano : $\pi : 2x - 3y + z + 6 = 0$
Calculamos los puntos de corte con los ejes: A(-3,0,0) ; B(0,2,0) y C(0,0,-6)
El volumen del tetraedro se puede hacer con el producto mixto:
$\boxed{V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}\,, \overrightarrow{OB}\,, \overrightarrow{OC}\right]\right| = 6\ u^3}$

12.-No EvAU Las dos rectas son paralelas (debes comprobarlo, obteniendo sus vectores directores o estudiando el sistema).
Si las dos rectas son paralelas, el lado del cuadrado será la distancia de una de ellas a la otra.
$lado = d(r,s) = \frac{5\sqrt{2}}{3}\ u. \Rightarrow S = l^2 = \frac{50}{9}\ u^2$

13.- No EvAU a) Si a=-1/2 las rectas son secantes (se cortan en un punto P(1/2 , 5/2 , -1/2)).
Si $a \neq -\frac{1}{2}$ entonces las rectas se cruzan en el espacio.

b) Para a=3 las rectas se cruzan por lo que aplicaremos la fórmula para hallar su distancia.
$\boxed{d(r,s) = \sqrt{14}\ u.}$

14.- La recta la obtendremos como intersección de dos planos $\boxed{r: \begin{cases} 2x+19y-25z-36=0 \\ 8x+y+5z=0 \end{cases}}$

15.- La ecuación de la recta es: $\boxed{r: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}}$

16.- Hay dos puntos que verifican el enunciado que son: $\boxed{P(7,9,1) \text{ y } Q(-5,-7,1)}$

17.- No EvAU a) Si $\boxed{a \neq 1 \wedge a \neq -1}$ $Rag(A) = 3$; $Rag(\bar{A}) = 4$, se cruzan en el espacio.
Si $\boxed{a=-1}$ $Rag(A) = 3$; $Rag(\bar{A}) = 3$, las rectas se cortan en un punto P(2,1,2).
Si $\boxed{a=1}$ $Rag(A) = 2$; $Rag(\bar{A}) = 3$, las rectas son paralelas.

b) Para a=0 las rectas se cruzan en el espacio. Podemos hacerlo de dos formas:
-Los puntos más próximos entre si son los de la perpendicular común a ambas. Si calculamos dicha recta, la intersección con cada una de las dos rectas originales nos dará los puntos que buscamos. $P_r(1,1,1)$ y $Q_s(1,1,2)$
- Si tomamos un punto genérico en cada recta $P_r(1,\alpha,1)$ y $Q_s(\beta,1,2)$ el vector $\overrightarrow{PQ}$ debe ser perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{s}$ luego: $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$
resolviendo el sistema obtendremos los valores de α y β y por tanto sabremos cuales son los puntos P y Q que buscamos. $P_r(1,1,1)$ y $Q_s(1,1,2)$

No nos piden cuánto vale la distancia mínima, pero si la pidieran se podría hacer fácilmente , ya que en este caso: $d(r,s) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 1\ u.$

18.- Se trata de calcular la perpendicular común a las dos rectas (el eje OZ y la recta "s")
La obtendremos como intersección de dos planos $\boxed{r: \begin{cases} x-y = 0 \\ 3x-3y+2z+13=0 \end{cases}}$

19.- $\boxed{V = 216\ u^3}$

20.- En realidad en este ejercicio no podemos asegurar que sea un cuadrado pero si un rectángulo (piensa en el enunciado, hazte un escueto dibujo y lo entenderás)

a) La recta tiene que ser paralela al vector $\overrightarrow{PQ}$ y tendrá de ecuación: $r: \frac{x+4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+6}{-2}$

b) El plano que contiene al cuadrado será: $\pi: 2x - y - 2z + 3 = 0$

c) Se pueden calcular los dos vértices que están en la recta y son A(0,-1,2) y B(-1,1,0)

Ciertamente con los puntos A y B obtenidos si que se forma un cuadrado, pero es casualidad.

21.- No EvAU a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 16$
b) $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 9$
c) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{6}$
d) Se pueden calcular los planos mediatrices de cada segmento AB , BC y CD . Donde se corten será el centro de la esfera. (mucho cálculo y pesado) $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 25$

22.- No EvAU Los planos son paralelos luego el diámetro es la distancia entre los dos planos.
$d = d(\pi_1, \pi_2) = 3 \rightarrow r = \frac{3}{2} \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9\pi}{2}\ u^3$

23.- No EvAU El centro es C(1,-1,-3) y el radio es r= 3u.
La distancia del centro al plano es $d(C,\pi) = 4\sqrt{3} \simeq 6{,}93\ u.$
Como el plano está más lejos del Centro que el radio de la esfera, es exterior a ella.

ACTIVIDADES ACCESO A LA UNIVERSIDAD.

1.- Hay dos soluciones posibles que son : $\boxed{m=6 \quad ; \quad m=-6}$

2.- Hallamos el punto Q proyección de R sobre el plano: Q(0,3,-1)

Con este dato el área del triángulo será: $\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{\sqrt{42}}{2} \; u^2 \simeq 3{,}24 \; u.s.}$

3.-No EvAU Estudiamos el sistema y esto ocurre cuando $\boxed{a = 5}$.

4.- No EvAU El plano es el que contiene a la recta y al centro del cuadrado $\boxed{\pi:\ 2x - 2y - z - 1 = 0}$

Para hallar el área haremos la distancia del centro a la recta y el lado será el doble.

$l = 2 \cdot d(C, r) = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \; u. \qquad \rightarrow \qquad \boxed{S = l^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \; u^2}$

5.- Este ejercicio tiene un enunciado disparatado e imposible (si la recta está contenida en el plano y pasa por el punto P(1,2,-1), este punto debería estar contenido en el plano y no lo está, compruébalo).

Podemos hacer el ejercicio sin ese dato que por otra parte no es necesario, es decir sabiendo que está en el plano y que corta perpendicularmente a la recta.

Calcula el punto de corte de recta y plano y te saldrá P(2,1,-1) , ese punto es de la recta "s" que buscamos

Calcula el vector director que será perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{n}$, luego $\vec{s} = \vec{r} \times \vec{n}$

Sol: $s: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{3}$

6.- El vértice que falta es: $\boxed{C(4,2,2)}$

El área será: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{2} \; u^2}$

7.- El punto B es el punto de corte del plano mediatriz del segmento OA con la recta.

De aquí obtenemos $\boxed{B(3,7,5)}$

Otra forma de hacerlo, algo más complicada o no, es poner el punto B en paramétricas porque pertenece a la recta, será: B(2t-3 , 3t-2 , 3t-4) y sabiendo que $d(B,O) = d(B,A) \rightarrow \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ podemos obtener la "t" y el punto B. $t = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{B(3,7,5)}$

8.- No EvAU a) Si m=2 se cortan en un punto, el origen O(0,0,0) y si $m \neq 2$ se cruzan.

b) Para m=1 las rectas se cruzan luego se puede hacer.

La recta la obtendremos como intersección de dos planos $\boxed{r: \begin{cases} 4x + 2y - 5z - 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}}$

c) Para m=-2 también se cruzan luego se puede calcular con la fórmula: $\boxed{d(s,t) = \sqrt{2} \, u.}$

9.- Hallamos el plano perpendicular a r que pasa por el punto A $\pi:\ x + 2y - z - 4 = 0$

Hallamos el punto de corte de este plano con la recta r. P(2,1,0)

Ya tenemos dos puntos de la recta que buscamos: $\boxed{s: \ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}}$

10.- a) Hay dos posibles soluciones: $\boxed{a=-1/2 \ , \ b=5}$ y $\boxed{a=2 \ ; \ b=-5}$

b) $S = |(5,-1,4) \times (1,3,0)| = \boxed{4\sqrt{26} \; u^3}$

11.- Hay que calcular el área de cada cara y luego sumar las cuatro. $S_{TOTAL} = \frac{27+9\sqrt{3}}{2} u^2$