MATEMÁTICAS -II

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL TEMA 9. DERIVADAS

Páginas 244, 245 y 246

1.- a) $TVM\ [2,4] = 6$ b) $TVM\ [2,4] = \frac{1}{6} \simeq 0{,}1667$

c) $TVM\ [2,4] = -\frac{13}{85} \simeq 0{,}1529$ d) $TVM\ [2,4] = \frac{3-\sqrt{7}}{2} \simeq 0{,}1771$

2.- a) f '(1) = 0 b) f '(7)=1/4 c) f ' (3)= -1/8

3.- a) No es derivable en x=0 porque sus derivadas laterales son distintas.
b) Si es derivable en x=0 y su derivada vale f '(0)=0
c) Si es derivable en x=0 y su derivada vale f '(0)=1

4.- a) a=2 ; b=-7 b) a=2 ; b=-1 c) a=-1 ; b=0

5.- a) Recta tangente t: x-y=0 Recta normal n: x+y=0
b) Recta tangente t: 3x+4y-25=0 Recta normal n: 4x-3y=0
c) Recta tangente t: 3x-y-12=0 Recta normal n: x+3y+16=0

6.- La pendiente de la recta es m=-5 que debe ser igual a la derivada. Esto es en el punto P(1,-3)

7.- Si $x = 1 \rightarrow y = -2$ luego el punto de tangencia, común a la recta y a la curva, es P(1,-2).
La recta tangente pasa por ese punto y tiene de pendiente m= -2 = f '(1)
Con estos datos, los parámetros deben ser: $\boxed{a=2\ ;\ b=-6}$

8.- La recta secante que pasa por los puntos A(2,2) y B(6,22) tiene de pendiente m=5 , luego la recta tangente que buscamos tiene también de pendiente m=5.
La derivada en el punto de tangencia será f '(x)=m=5 → x = 4 → $P(4, 8)$

9.- En el punto $P(a, e^{3a})$ la recta tangente es t: $y - e^{3a} = 3e^{3a}(x-a)$ y si la recta pasa por el punto P(0,0) se tiene:
$0 - e^{3a} = 3e^{3a}(0-a) \quad \rightarrow \quad e^{3a}\ (1-3a) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 1/3}$

10.- a) En P(2,4) → $\alpha_1 - \alpha_2 = 30º57´50´´$ En Q(-1,1) → $\alpha_1 - \alpha_2 = 71º33´54´´$
b) En P(1,2) → $\alpha_1 - \alpha_2 = 33º41´24´´$ En Q(-1,0) → $\alpha_1 - \alpha_2 = 0º$

11.- Los puntos de corte son A(-2,-1) y B(2,1) por lo tanto hay que hacerlo en el punto B.
En dicho punto B(2,1) → $\alpha_1 - \alpha_2 = 90º$

12.- a) $y´=5x^4$ b) $y' = 7x^6$

c) $y' = 15x^2(x^3-s)^4$ d) $y' = \frac{1}{4}\ (4x)^{-3/4} \cdot 4 = \frac{1}{\sqrt[4]{(4x)^3}}$

e) $y' = 3^x\ (3x^2 + x^3\ ln3)$ f) $y' = (x+1)(x-1)^2(5x+1)$

g) $y' = 2^x\ (ln2 \cdot lnx + \frac{1}{x})$ h) $y' = 12\ e^{3x}\ (e^{3x}+2)^3$

i) $y' = -\frac{20x}{3-2x^2}$ j) $y' = -\frac{40x(1+3x)}{(x^2+2x^3)^6}$

k) $y' = \frac{18x^2}{(5-4x^3)\sqrt{5-4x^3}}$ l) $y' = \frac{6x-4}{\sqrt{2x-4}}$

m) $y' = \frac{e^x\ (x-2)}{x^3}$ n) $y' = \frac{3x^2-x^3}{e^x}$

ñ) $y' = 2x \cdot 2^x \cdot a^{2x} + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot a^{2x} + 2x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x} \ln a$

o) $y' = -4\ sen\ (4x)$ p) $y' = 8\ sen^3 2x \cos 2x$
q) $y' = -4x^3 \text{ sen } x^4$

13.- a) $y' = \frac{3(1-2x^2)\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $y' = \frac{sen(x+1)\cos(x-1)-\cos(x+1)sen(x-1)}{sen^2(x+1)} = \frac{sen\ 2}{sen^2(x+1)}$

c) $y' = \frac{3(1+tg^2x)}{tg\ x}$ d) $y' = \frac{-1-\cos x}{sen^2x}$

e) $y' = \text{sen}\{\text{sen}(\cos x)\} \cdot cos(cos\ x) \cdot \text{sen}\ x$

f) $y' = \frac{2^{3x}\ (2x+3x^2\ ln2-3x^2)}{e^{3x}}$

g) $y' = -6\ cos^2 2x\ \ \text{sen}\ 2x\ \ \ sen^2 3x +\ 6\ cos^3 2x\ \ \text{sen}\ 3x\ cos\ 3x$

h) $y' = (x-1)^x\ \left[\frac{(x-1)\ln(x-1)\ +\ x}{x-1}\right]$

i) $y' = -6x^2\ cos\ x^3\ \text{sen}\ x^3\ = -3x^2\ sen\ 2x^3$

j) $y' =\ 3x^2 - 2\text{x}\ \text{sen}\ x^2$ k) $\text{y}' = \frac{3\ln^2(\ln x)}{x\ \ln x}$

l) No existe la función para ningún "x" (simplifica y verás, te queda el logaritmo de un número negativo para cualquier valor de "x") luego no se puede derivar.

m) $y' =\ -\frac{1}{x^2+1}$

n) $y' = \frac{a^2}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$ ñ) $y' = -\frac{\text{sen}\ x}{1+cos^2x}$

o) $y' = (\ln x)^x\ \left[\ln(lnx) +\ \frac{1}{\ln x}\right]$ p) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\ \sqrt{1-x}}$

q) $y' = \frac{-5\sqrt{1+5x}}{(1+5x)^2\ \sqrt{1-5x}}$ r) $y' = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

s) $y' = \frac{1}{2(x+2)\sqrt{x+1}}$ t) $y' = \frac{-4-x}{(2+x)^2}$

u) $y' =\ -\ \frac{2}{(x-4)\sqrt{x}}$ v) $y' = \frac{1+tag^2x}{\sqrt{1-tag^2x}}$

w) $y' = (sen\ x)^{2\ cosx}\left[-2\ sen\ x \cdot ln\ (sen\ x) +\ \frac{2cos^2x}{sen\ x}\right]$

14.- a) $f'''(x) = 3^{2x} \cdot 2^3 \cdot ln^3 3$ b) $g^{(4)}(x) = \frac{72}{(x-2)^5}$

c) $h^{(5)}(x) = \frac{768}{(2x+3)^5}$ d) $f^{(10)}(x) = -\ 4^{10}\ sen\ 4x$ (se repiten cada 4)

15.- a) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+2)^n}$ b) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$

c) $g^{(n)}(x) = e^x + (-1)^{n+1}e^{-x}$ d) $g^{(n)}(x) = (-1)^n\ \cdot 4^{-x} \cdot (\ln 4)^n$

e) $h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$ f) $h^{(n)}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

ACTIVIDADES DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD pag. 246

1.- a) La función se puede redefinir: $f(x) = |x-2| + |x| = \begin{cases} -2x+2 & si\ x<0 \\ 2 & si\ 0 \le x < 2 \\ 2x-2 & Si\ x \ge 2 \end{cases}$

Es continua en x=0 y en x=2, luego lo es $\forall x \in R$. Veamos las derivadas laterales:

La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} -2 & si\ x<0 \\ 0 & si\ 0<x<2 \\ 2 & Si\ x>2 \end{cases}$

$En\ el\ punto\ \ x=0 \quad \to f'(0^-) = -2\ \ ;\ \ f'(0^+) = 0$ luego f(x) no es derivable

$En\ el\ punto\ \ x=2 \quad \to f'(2^-) = 0\ \ ;\ \ f'(2^+) = 2$ luego f(x) no es derivable

Conclusión: La función es derivable en $R - \{0, 2\}$

b) La función se puede redefinir como: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x<0 \\ e^{x} & si\ x \ge 0 \end{cases}$

Es continua en x=0 luego lo es también para cualquier número Real. Veamos las derivadas laterales:

La función derivada es: : $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si\ x<0 \\ e^{x} & si\ x>0 \end{cases}$

$En\ el\ punto\ \ x=0 \quad \to f'(0^-) = -1\ \ ;\ \ f'(0^+) = 1$ luego f(x) no es derivable

Conclusión: La función es derivable en $R - \{0\}$

2.- El único punto donde puede no ser derivable es en x=1

Para que sea derivable debe ser continua en x=1 por lo tanto debe ser a=1 ó a=2

Con estos valores debemos comprobar si sus derivadas laterales son iguales y eso sólo ocurre para a=1 y no para a=2. **Por lo tanto "para que sea derivable en todo R debe ser a=1"**

3.- El enunciado del libro está mal debe ser e^{x-b} en lugar de e^{2-b} El único punto problemático es el x=2. Debe ser continua y tener derivadas laterales iguales y eso ocurre para $\boxed{a=3\ ;\ b=2}$

4.- a) $y - 0 = \frac{2}{3}(x-0) \quad \to \quad f'(x) = \frac{2}{3}x$

b) Como la derivada es de primer grado la función tiene que ser de 2º grado (parábola).

Como la derivada es negativa para x<0 la función es decreciente para x<0.

Como la derivada es positiva para x>0 la función es creciente para x>0.

Por tanto la gráfica que corresponde a la función es la B.

5.- Recordando que si dos rectas son perpendiculares $m = -\frac{1}{m'}$ por lo tanto $f'(a) = -\frac{1}{f'(-a)}$

Calculando la derivada y las pendientes y operando queda $\mathbf{a} = \sqrt{2}$ ó $\mathbf{a} = -\sqrt{2}$

6.- El punto de tangencia es P(a , ln 2a) y la pendiente en ese punto es $m = f'(a) = \frac{1}{a}$

La recta tangente será: $t: y - ln2a = \frac{1}{a}\ (x-a)$ Si pasa por el origen P(0,0) se tiene:

$0 - ln2a = -1 \quad \to \quad 2a = e \quad \to a = \frac{e}{2}$

Sol: La recta tangente es: $\boldsymbol{t: y - lne = \frac{e}{2}\left(x - \frac{2}{e}\right)} \quad \to \quad \boxed{\boldsymbol{2x - ey = 0}}$

8.- La pendiente de la recta tangente en un punto genérico "x" es $m = f'(x) \quad \to \quad m = 3x^2 + 3$
La pendiente depende evidentemente del valor de "x" . Si representamos la curva $m=3x^2+3$ veremos que es una parábola por lo que su mínimo está en el vértice de la misma $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$

Si $x_v = 0 \ \to \ y_v = 4$ **Luego la pendiente más pequeña es en P(0,4).**

11.- Sea x la arista del cubo , el área será $A = 6x^2$ Podemos hacerlo de dos formas:

Calculando áreas: $\left\| \begin{matrix} Si\ x = 25\ cm. & \to & A_1 = 3750\ cm^2 \\ Si\ x = 25{,}002\ cm. & \to & A_2 = 3750{,}6\ cm^2 \end{matrix} \right\| \to \ A_2 - A_1 = 0{,}6\ cm^2$

Con la diferencial $dA = f'(x)dx = 12x\ dx \quad \to \quad dA = 12 \cdot 25 \cdot 0{,}002 = 0{,}6\ cm^2$

Sea x la arista del cubo , el Volumen será $V = x^3$ Podemos hacerlo de dos formas:

Calculando Volúmenes: $\left\| \begin{matrix} Si\ x = 25\ cm. & \to & V_1 = 15625\ cm^3 \\ Si\ x = 25{,}002\ cm. & \to & V_2 = 15628{,}75\ cm^3 \end{matrix} \right\|\ V_2 - V_1 = 3{,}75\ cm^3$

Con la diferencial $dV = f'(x)dx = 3x^2\ dx \quad \to \quad dV = 3 \cdot 25^2 \cdot 0{,}002 = 3{,}75\ cm^3$