SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL LIBRO. DETERMINANTES

Páginas 62, 63, 64

1.- a) 4 b) 0 c) -1 d) 0 e) $m^2 + n^2$

2.- a) 2 b) -1 c) $-a^3 - 1$ d) -15

3.- a) $\boxed{x=-5 \; ; x=-3 \; ; x=3 \; ; x=5}$ b) $\boxed{x=0 \; ; x=-1 \; ; x=1}$ c) $\boxed{x=4}$

4.- a) 2 Inv; 3 Inv ; 2 Inv b) 4 Inv ; 7 Inv ; 2 Inv c) 4 Inv ; 6 Inv.

5.- Reordena primero los productos para que te queden las filas ordenadas y luego mira la signatura de las columnas. Sol: a) $(-1)^7=-1$ b) $(-1)^4=+1$ c) $(-1)^7=-1$

6.- Observa si hay alguna línea c. l. de otras y utiliza, si es necesario, las propiedades de los determinantes para obtener dos líneas paralelas proporcionales o iguales.

7.- Se trata de utilizar propiedades de los determinantes para conseguir que en una línea todos los elementos sean múltiplos del número que te piden con lo que se puede sacar factor común fuera y por tanto el resultado será múltiplo de dicho número. (No siempre es fácil)

9.- a) $|2A| = 2^3|A| = 40$ b) $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 125$ c) -30

10.- a) $|A| = 0 \; ; \; |A| = 1$ b) $|A| = -1 \; ; \; |A| = 1$

11.- a) $\left| \begin{array}{l} A \rightarrow \alpha_{12} = 0 \; ; \; \alpha_{22} = 2 \; ; \; \alpha_{23} \; y \; \alpha_{31} \; no\ existen \\ B \rightarrow \alpha_{12} = 4 \; ; \; \alpha_{22} = -12 \; ; \; \alpha_{23} = -8 \; ; \; \alpha_{31} = -16 \\ C \rightarrow \alpha_{12} = -6 \; ; \; \alpha_{22} = -3 \; ; \; \alpha_{23} = 6 \; ; \; \alpha_{31} = 1 \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} A \rightarrow A_{12} = 0 \; ; \; A_{22} = 2 \; ; \; A_{23} \; y \; A_{31} \; no\ existen \\ B \rightarrow B_{12} = -4 \; ; \; B_{22} = -12 \; ; \; B_{23} = 8 \; ; \; B_{31} = -16 \\ C \rightarrow C_{12} = 6 \; ; \; C_{22} = -3 \; ; \; C_{23} = -6 \; ; \; C_{31} = 1 \end{array} \right.$

b) $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -20 \\ 6 & -12 & 8 \\ -16 & -2 & -10 \end{pmatrix}$ $C^* = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.- a) 0 b) -527 c) -295

13.- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14.- $\nexists \; A^{-1} \; cuando \; a = 1 \lor a = 3 \; ; \; Si\ a = 2\ si\ existe \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

15.- Si a= 0 → Rag(A)=2 , Si a#0 → Rag(A)=3

16.- La matriz queda $A^2 - A^T = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ Si estudiamos su rango será:

$Si\ a = 2 \longrightarrow \; Rag\ (A^2 - A^T) = 2$

$Si\ a = \frac{1}{2} \longrightarrow \; Rag\ (A^2 - A^T) = 2$

$Si\ a \neq 2 \land a \neq \frac{1}{2} \longrightarrow \; Rag\ (A^2 - A^T) = 3$

17.- Basta con calcular A^{-1} para ver que es igual que A^t. Aun es más fácil calcular $A \cdot A^t$ para ver que da la Identidad, luego A^t es la inversa de A.

Obviamente se tiene: $(A^t A)^{20016} = I^{20016} = I$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD.

1.- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) x = -1 (otras dos complejas x= i , x=-i)

2.- a) $2a^2b^4c^2$ b) -2 c) b(a+b+c)(a-b+c)(a-c) d) $x^3(4+x)$

3.- a) $|B^2| = |16\,I\,| = 16^3\,|I| = 16^3 \quad \Longrightarrow \quad |B| \cdot |B| = 16^3 \quad \Longrightarrow \quad |B| = \pm 64$

b) $|A(A-3I)| = |-2I| \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |A-3I| = (-2)^n \neq 0$ luego podemos concluir que $|A| \neq 0$ y por tanto tiene inversa.

Para calcular A^{-1} basta con multiplicar en ambos miembros por A^{-1} , simplificar y despejar. Se obtendrá: $A^{-1} = \frac{1}{2}\,(3I - A)$

c) No es posible en ningún caso ya que si $|A^{-1}| = |A^t|$ se tiene; $\frac{1}{|A|} = |A|$ por lo tanto: $|A| = \pm 1$

d) Como: $|2A| = -16 \quad \Rightarrow \quad 2^n|A| = -16 \quad \Rightarrow \quad 2^n \cdot (-1) = -16 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

4.- a) Como $|A| = 2a^2$: La matriz A es inversible cuando $a \neq 0$

Para a=0 Rag (A) = 1 (sólo queda una columna)

Para $a \neq 0$ Rag (A) = 3 (Si el determinante no es cero las tres filas son independientes).

b) Es un tostón de ejercicio, hay que calcular A^{-1} e igualar elementos. Sale a=2

5.- Este ejercicio es mejor hacerlo por menores, aunque primero hagas algún cero:

Si a=1 $\rightarrow$ Rag(M)=1

Si a= -1 $\rightarrow Rag(M) = 2$

Si $a \neq 1 \wedge a \neq -1 \;\rightarrow\; Rag(M) = 3$

6.- Podemos calcular primero $|A| = 4$; $|B| = -4$. A partir de aquí:

a) $|A+B| = 24$ (no se puede aplicar ninguna propiedad, hay que sumar primero)

b) $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |(A+B)^{-1}| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{|A+B|} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{192}$

c) $|(A+B)^{-1}A| = |(A+B)^{-1}| \cdot |A| = \frac{1}{|A+B|} \cdot |A| = \frac{1}{24} \cdot 4 = \frac{1}{6}$

d) $|A^{-1}(A+B)| = |A^{-1}| \cdot |A+B| = \frac{1}{|A|} \cdot |A+B| = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$

e) $|2A \cdot B \cdot A^{-1}| = 2^3 \cdot |A| \cdot |B| \cdot |A^{-1}| = 8\,|B| = 8 \cdot (-4) = -32$

f) $|A^3 \cdot B^{-1}| = |A^3| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{64}{-4} = -16$

7.- Como $|A| = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \; \exists\, A^{-1}$ y podremos utilizar A^{-1} para despejar X en la ecuación matricial, obteniendo: $X = 2\,A^{-1}B$

Calculamos: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ y entonces: $X = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}$