

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS TEMA 4 RECTA-PLANO

Página 114 y siguientes

- 1.- a) $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1)$; $\overrightarrow{QP} = (1, -1, -1)$ b) El punto será: $R(3, 3, 0)$
 c) El punto será: $A(1, 0, 2)$
- 2.- Dibujarlo es farragoso y no te lo aconsejo. El vector $3\vec{v} - 2\vec{w} = (10, 10, -19)$
- 3.- $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$
- 4.- Podemos comprobar que son una base demostrando que son L.I. utilizando los determinantes o con la definición de independencia. Al ser tres vectores L.I. en \mathbb{R}^3 también son Sistema Generador, por lo tanto son base.
 El vector $\vec{v} = 8\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ luego en esta base las coordenadas son: $\vec{v} = (8, -2, 5)$
- 5.- Podemos comprobar que son una base demostrando que son L.I. (por ejemplo comprobando que el determinante no es cero). Al ser tres vectores L.I. en \mathbb{R}^3 también son Sistema Generador, por lo tanto son base.
 El vector $\vec{r} = 2\vec{u} - 1\vec{v} + 4\vec{w}$ luego en esta base las coordenadas son: $\vec{r} = (2, -1, 4)$
- 6.- Para $b=3$, y para $b=1$ el determinante es cero, no son L.I. luego no forman Base.
 $\forall b \in \mathbb{R} \mid b \neq 3 \wedge b \neq 1$ el determinante no es cero luego son L.I. y además Sistema Generador por ser 3 vectores libres en un espacio de dimensión 3. Luego son base.
- 7.- Ec. Vectorial: $(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda(-1, 2, 4)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ Ec. Paramétrica: $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
 Ec. Continua: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4}$ Ec. intersec. planos, por ejemplo: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2y - z + 5 = 0 \end{cases}$
- 8.- $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = (1, -5, -1)$ Ec. Param.: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 5\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ Ec. Cont.: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{-1}$
 Un punto alineado con P y Q puede ser cualquiera de la recta, por lo que basta con dar valores:
 P. EJ. : Si $\lambda = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (3, -8, 1)$
- 9.- Ec. Vectorial: $(x, y, z) = (0, -2, 0) + \lambda(2, -3, 1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ Ec. Paramétrica: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
 Ec. intersec. planos, por ejemplo: $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 3x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$
- 10.- Los puntos pueden ser $A(0, 7, 11)$ y $B(1, 4, 6)$
 Un vector puede ser: $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, -5)$
 También se puede hacer: $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -5)$
- 11.- La recta será: $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = -z$
- 12.- Se refiere a la intersección de dos planos y, por ejemplo, será: $r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$
- 13.- a) $\pi: 2x - 7y + 4z - 23 = 0$ b) $\pi: 9x - y - 4z - 15 = 0$
 c) $\pi: x + y + 3z = 0$ d) $\pi: 3x - y + z - 14 = 0$
- 14.- Plano OXY: $\pi: z = 0$; Plano OXZ: $\pi: y = 0$; Plano OYZ: $\pi: x = 0$
 EJE OX: $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ ó también $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Observa que se cortan los planos OXZ con OXY
 EJE OY: $r: \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ ó también $r: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Observa que se cortan los planos OYZ con OXY
 EJE OZ: $r: \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ ó también $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Observa que se cortan los planos OYZ con OXZ
- 15.- $\pi: x + y - 4 = 0$

- 16.- a) $\pi: y-9z+15=0$
 b) Las dos rectas que nos dan son paralelas, tomaremos por tanto un punto de una de ellas, el vector director de una de ellas (es el mismo) y un vector que una un punto de una recta con otro de la otra.
 $\pi: 17x-7y-z-38=0$
- 17.- **No EvAU** a) Los tres planos se cortan formando una recta de ecuación: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4y+z=5 \end{cases}$
 b) Los tres planos no tienen nada en común, se cortan dos a dos formando sendas rectas.
 c) Los planos se cortan en el punto $P(1,4,-2)$.
- 18.- **No EvAU** a) El plano y la recta se cortan en el punto $P(6,10,3)$.
 b) La recta es paralela al plano.
- 19.- **No EvAU** Para $a=1$ son secantes (se cortan en un punto). El punto es $A(5,2,1)$
 Para $a \neq 1$ se cruzan en el espacio
- 20.- **No EvAU** Para $m=-1$, se cortan formando una recta que puede ser: $r: \begin{cases} x-y+z=2 \\ y-z=-1 \end{cases}$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD.

- 1.- Dos formas de hacerlo:
 a) Vectorialmente, $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ y pasa por el punto P. $r: \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-4}$
 b) Planos paralelos a los que nos dan y que pasan por el punto P. $r: \begin{cases} 3x+2y-z-5=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$
- 2.- El plano que nos piden tiene de ecuación: $\pi: 9x+5y-2z-21=0$
- 3.- **No EvAU** a) Si $m=14$, las rectas se cortan en el punto $P(17, 8, 6)$
 Si $m \neq 14$, las rectas se cruzan en el espacio
 b) Para $m=14$ se cortan en el punto P y el plano que las contiene es: $\pi: 2x-5y-z+12=0$
- 4.- La recta expresada como intersección de esos dos planos es: $r: \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-3y+z-2=0 \end{cases}$
- 5.- El cuarto vértice es: $D(-1,-8,-1)$
 La ecuación del plano que contiene al paralelogramo es: $\pi: x-y+z-6=0$
- 6.- **No EvAU** Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$, se cortan en un punto.
 Si $a=5$, los tres planos no tienen nada en común, se cortan dos a dos formando sendas rectas.
 Si $a=2$, los tres planos se cortan formando una recta.
- 7.- Para ser paralelos sus vectores normales deben ser iguales o proporcionales, luego:
 $\frac{a}{2} = -\frac{2}{4} = \frac{b}{a} \implies a = -1 ; b = 1/2$
- 8.- **No EvAU** Pueden ser: paralelas, secantes (cortan en un punto) ó coincidentes (superpuestas).
- 9.- a) Calcula los cuatro puntos medios, calcula la ecuación del plano con tres de ellos y te saldrá:
 $\pi: 6x+6y-8z-33=0$, por último comprueba que el cuarto punto también cumple dicha ecuación.
 b) Esta recta que tiene por vector director $\vec{r} = \overrightarrow{AD}$ es paralela al plano. Basta con comprobar que $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 0$ (\overrightarrow{AD} es perpendicular a \vec{n})
 Este ejercicio es bastante curioso, dibújate un tetraedro a ojo, marca los puntos y el plano que te piden y observa que siempre es cierto que la arista es paralela al plano, independientemente del dibujo y por tanto de los vértices que hayas elegido. ¿Podrías demostrarlo?
- 10.- El punto intersección es $P(5,-1,1)$ y la recta que te piden se puede hacer de dos formas:
 - Vectorialmente, $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ y pasa por el punto P. $r: \frac{x-5}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$
 - Planos paralelos a los de la recta que nos dan y que pasan por el punto P.
 $r: \begin{cases} y+3z-2=0 \\ x-y-z-5=0 \end{cases}$
- 11.- **No EvAU** Estudiando el sistema formado por recta y plano debe salir SCI, luego $a=1$; $b=4$.
 También puedes calcular un par de puntos de la recta y sustituir en la ecuación del plano. Si la recta está contenida en el plano se debe verificar siempre y de ahí podrás calcular "a" y "b".
- 12.- El plano que buscamos debe contener a la recta y al centro del cuadrado. Haciendo los cálculos oportunos se obtiene la ecuación de dicho plano que es: $\pi: 2x-2y-z-1=0$