MATEMÁTICAS -II
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL TEMA 8. CONTINUIDAD

<u>Páginas 216, 217 y 218</u>

2.- a) Es continua en (0,3) pero no lo es en x=0 ni en x=3 porque sus límites laterales no coinciden (D.I.S.F.).

b) Es continua en $(-2,\infty)$ pero no lo es en x=-2 porque:

No existe la función, $\nexists\ g(-2)$ y tampoco tiene límite porque no hay límite por la izda. Discontinuidad Inevitable de tipo Esencial.

c) Redefinimos la función: $h(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x \cdot (-x) & Si\ x \leq 0 \\ x \cdot x & Si\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & Si\ x \leq 0 \\ x^2 & Si\ x > 0 \end{cases}$

Es continua en todos los puntos del intervalo [-2,2] incluidos los extremos

3.- a) Tiene que ser: k=-1

b) Tiene que ser: k=1/2 . Pero no será continua $\forall x \in R$, sólo para $x \in (0,\infty)$

c) $k = 1$ ó $k = 2$

4.- a) Si a=-8 la función es continua en todo R

Si $a \neq -8$ la función es continua en todo R excepto en x=2 donde es D.I.S.F.

b) Si a= 1/2 la función es continua en todo R

Si $a \neq 1/2$ la función es continua en todo R excepto en x=0 donde es D.I.S.F.

5- La función es continua para cualquier valor de R, excepto:

En x=-2 es Disc. Inev. Salt. Inf. (D.I.S.I.) (Asíntota Vertical)

En x=0 donde presenta una Discontinuidad Inevitable de Salto Finito (D.I.S.F.)

En x=2 donde es presenta una Discontinuidad Evitable.

En x=4 donde es presenta una Discontinuidad Evitable.

6.- a) Tienen que ser: $\boxed{a=1 ;\ b=4}$

b) Utiliza tus conocimientos de logaritmos y exponenciales. Tienen que ser: $\boxed{a=2 ;\ b=-3}$

7.- a) En x=-4 es Disc. Inev. S. Inf. (As.Vert.) En x=1 presenta una Disc. Evit.

b) En x=0 tiene una D.I.S.F.

c) En x= 0 presenta una D.I.S.F. En x=1 tiene una D. Evitable.

9.- a) Sí las verifica, luego existe un punto del intervalo (-1,0) en el que la función vale cero.

b) No las verifica porque no tiene distinto signo (en los dos extremos sale positiva). No podemos asegurar por tanto que haya un punto en $\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$ en el que la función valga cero, aunque podría haber alguno.

10.- a) Tiene al menos una solución en ese intervalo ya que la función $f(x) = x^2 - e^x + 2$ cumple las condiciones de Bolzano en el intervalo [1,2] luego existe al menos un valor $c \in (1,2)\ \ / f(c) = 0$ que es una solución de la ecuación.

b) No verifica las condiciones porque f(1)=-2<0 y f(3)=-ln 3 <0 y no tiene distinto signo (en los dos extremos sale negativa). No podemos asegurar por tanto que haya un punto en el intervalo (1,3) en el que la función valga cero, aunque podría haber alguno, por tanto no podemos asegurar que la ecuación tenga solución en ese intervalo.

11.- No lo contradice puesto que no es continua en ese intervalo, en $x = \frac{\pi}{2}$ es D.I.S.I. (No cumple las condiciones de Bolzano).

12.- Para calcular el punto de corte hay que resolver el sistema: $\begin{cases} y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 \\ y = e^x \end{cases}$

Si sustituimos la primera en la segunda tenemos:

$3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 = e^x \quad \rightarrow \quad 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 - e^x = 0$

Construimos la función: $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 - e^x$; que cumple las condiciones del Teorema de Bolzano en el intervalo [-1,0] luego existe un valor $x_0 \in (-1,0) \,/\, f(x_0) = 0$

Conocido x_0 podemos calcular $y_0 = f(x_0)$ ó $y_0 = g(x_0)$ Se cortan en el punto $P(x_0, y_0)$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD (pag.218)

1.- Redefinimos la función f: $f(x) = \begin{cases} 0 & Si\ x < 0 \\ x & Si\ x \geq 0 \end{cases}$ Entonces la función compuesta será:

$$g_\circ f(x) = g\left(\begin{cases} 0 & Si\ x < 0 \\ x & Si\ x \geq 0 \end{cases}\right) = \begin{cases} 0 & Si\ x < 0 \\ x^2 & Si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función es continua para cualquier número Real

2.- Redefinimos la función: $f(x) = \begin{cases} -(x+2) & Si\ x < -2 \\ x+2 & Si - 2 \leq x < -1 \\ x^2 & Si - 1 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & Si\ x > 1 \end{cases}$

Los puntos a estudiar porque puede ser discontinua son: x=-2 ; x=-1 y x=1

Esta función es continua para cualquier número Real excepto en x=1 donde es D.I.S.F.

3.- Para que sea D. Ev. no debe existir la función pero si tener límite, es decir debe ser del tipo $\frac{0}{0}$, y para eso $\boxed{a=5 ; b=0}$

Con esos valores estudiamos las discontinuidades que pueda haber y son:

- En x=2 comprobamos que efectivamente es Discontinua Evitable.
- En x=0 también sale D. Evitable.
- En x=-7 que es D.I.S.I. (Tiene una Asíntota Vertical)

4.- Para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano debe ser continua y eso ocurre para

$$\boxed{a = \frac{1}{3} ; b = -2}$$

Como $f(-\pi) = 3 > 0 \quad y \quad f(2\pi) = -1 < 0$ se cumple el teorema en $[-\pi, 2\pi]$ luego estamos seguros de que hay un valor en $(-\pi, 2\pi)$ en el que la función vale cero. Para encontrarlo vamos a igualar a cero cada una de las ramas:

$3 + sen\, x = 0 \ \rightarrow$ No tiene solución.

$\frac{\cos x}{1/3} = 0 \ \rightarrow \ 3\cos x = 0 \ \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$; ……………… en $0 < x \leq \pi$

$\cos x - 2 = 0 \ \rightarrow$ No tiene solución.

La solución válida es $\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ que es la única de las que han salido que está en ese intervalo.

5.- a) No se puede aplicar nunca porque, a pesar de ser continua, siempre es positiva (para cualquier valor de x) por lo tanto no se puede encontrar ningún intervalo con signos contrarios.

b) Punto Corte: $\begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2} \\ y = 2x - 1 \end{cases} \ \| \ 2x - 1 = \frac{1}{1+x^2} \ \rightarrow \ 2x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

Si construimos una función: $H(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 2$ podemos asegurar que en al menos un punto "c" se anula y ese será la solución porque la función es continua (obviamente, es un polinomio) y además H(0)=-2 ; H(1)=1 por lo tanto podemos aplicar Bolzano y tendremos que en el intervalo (0,1) hay una solución, que no me piden pero se que la hay.

11.- Las raíces del polinomio son cuando éste vale cero : P(x)=0

a) Sea la función $P(x) = x^4-8x-1$ que es continua $\forall x \in R$ (obviamente, es un polinomio) y además P(0)=-1 ; P(-1)=8 por BOLZANO en el intervalo (-1,0) hay una solución que obviamente es negativa.

b) Sea la función $P(x) = x^4-8x-1$ que es continua $\forall x \in R$ (obviamente porque es un polinomio) y además P(0)=-1 ; P(3)=56 por BOLZANO en el intervalo (0,3) hay una solución que obviamente es positiva. De hecho está entre 2 y 3 (piénsalo).